Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
05./06.06.2008

5. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Test)

a) Entscheiden Sie, welchen der folgenden Aussagen wahr ist. Hierbei bezeichnen v, w Vektoren und S, T Matrizen.

i) $\langle v, w\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ oder $w = 0$.

ii) $\langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

iii) $\langle Sv, w\rangle = \langle Tv, w\rangle \Leftrightarrow S = T$.

b) Nennen Sie alle Eigenwerte und deren algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

c) Kreuzen Sie an, welche der folgenden Matrizen symmetrisch, selbstadjungiert, unitär, orthogonal oder normal ist:

Matrix	symmetrisch	selbstadjungiert	orthogonal	unitär	normal
$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & -2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$					

Aufgabe G14 (selbstadjungierte Matrizen)

Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = M_n(\mathbb{R})$ der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{R}$ und dessen Teilmenge

$$V_{\text{sa}} := \{A \in V : A^* = A\}.$$

a) Zeigen Sie, dass V_{sa} ein Untervektorraum von $M_n(\mathbb{R})$ ist.

b) Geben Sie für $n = 2$ eine Basis von V_{sa} an und bestimmen Sie die Dimension von V_{sa}.

Aufgabe G15 (Kern und Bild)

Gegeben sei die lineare Abbildung $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} v_1 - v_2 \\ v_3 - v_4 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie die Darstellungsmatrix M_T bzgl. der Standardbasen an.

b) Geben Sie die Darstellungsmatrix M_{T^*} bzgl. der Standardbasen an.

c) Bestimmen Sie Ker T und Bild(T^*) und zeigen Sie, dass Ker $T \perp$ Bild(T^*) ist.

d) Zeigen Sie allgemein, dass für eine lineare Abbildung $T : V \to W$ gilt:

$$\text{Ker } T = (\text{Bild}(T^*))^{\perp} \quad \text{und} \quad \text{Bild}(T) = (\text{Ker } T^*)^{\perp}$$

Hausübung

Aufgabe H15 (Orthonormalbasis (4 Punkte))
Gegeben sei der $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $\text{lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ an.

b) Zeigen Sie, dass der Vektor $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ in $\text{lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ liegt und stellen Sie ihn als Linearkombination der in a) konstruierten Basis dar.

Aufgabe H16 (Nilpotente Abbildungen (4 Punkte))
Sei $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft

$$L^n = L \circ L \circ \ldots \circ L = 0 \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Zeigen Sie, dass $\lambda \in \mathbb{K}$ genau dann ein Eigenwert von L ist, wenn $\lambda = 0$ ist.

Bemerkung: Eine lineare Abbildung mit der Eigenschaft (1) heisst *nilpotent*.

Aufgabe H17 (Eigenvektoren von selbstadjungierten linearen Abbildungen (4 Punkte))
Sei $T : V \to V$ eine selbstadjungierte lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass jeweils zwei Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten senkrecht aufeinander stehen.

Hinweis: Nutzen Sie die adjungierte Abbildung und deren Eigenschaften aus.