Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
29./30.05.2008

# 4. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

## Gruppenübung

**Aufgabe G10** (Test)

a) Sind die folgenden Aussagen wahr oder falsch?

i) Eine $n \times n$ Matrix kann nicht mehr als $n$ verschiedene Eigenwerte haben.

ii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind linear unabhängig.

iii) Eigenvektoren zu unterschiedlichen Eigenwerten sind eine Basis des Bildes der zugehörigen linearen Abbildung.

iv) Die Matrix $T - \lambda \mathbb{1}$ ist für jeden Eigenwert invertierbar.

b) Vervollständigen Sie die folgenden Aussagen so, dass sie wahr werden:

v) Die geometrische Vielfachheit ist immer $\{\leq, =, \geq\}$ der algebraischen Vielfachheit.

vi) Die {*geometrische, algebraische*} Vielfachheit eines Eigenwertes $\lambda$ gibt an, wie oft der Eintrag $\lambda$ auf der Diagonalen der Jordanschen Normalform steht.

vii) Die Anzahl der Jordanblöcke zu einem Eigenwert entspricht der {*geometrischen, algebraischen*} Vielfachheit.

c) Die Leibnizformel stellt die Determinante einer $n \times n$ Matrix als Summe über Produkte von Koeffizienten dar. Wieviele Summanden gibt es allgemein? Wieviele dieser Summanden verschwinden mindestens in den folgenden Fällen?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} * & * & 0 & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \\ * & 0 & * & 0 \\ 0 & * & 0 & * \end{pmatrix}.$$

d) Welche der folgenden Matrizen sind in Jordanscher Normalform?

$$\begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe G11** (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } C = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren zu jeder Matrix.

b) Geben Sie die Diagonalform der Matrizen an. Sollte dies nicht möglich sein, so begründen Sie dies.

**Aufgabe G12** (Jordansche Normalform)

Wir werden in dieser Aufgabe schrittweise die Jordansche Normalform der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -3 & -8 & 1 \\ 0 & -21 & -60 & 7 \\ 0 & 7 & 20 & -2 \\ 0 & -4 & -12 & 4 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Sie gehen dazu wie folgt vor:

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte von $A$.

b) Bestimmen Sie die algebraischen und geometrischen Vielfachheiten der Eigenwerte.

c) Bestimmen Sie eine Basis der verallgemeinerten Eigenräume.

d) Geben Sie eine Jordannormalform an.

# Hausübung

**Aufgabe H12** (Eigenwerte und Eigenfunktionen (4 Punkte))

Sei $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ der Vektorraum der einmal stetig differenzierbaren Funktionen.

a) Sei $V \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ der zweideimensionale Untervektorraum, welcher von den Vektoren

$$f_1(x) = e^x \cos(x) \text{ und } f_2(x) = e^x \sin(x)$$

aufgespannt wird und sei $\mathcal{B} = \{f_1, f_2\}$.
Zeigen Sie, dass der Ableitungsoperator $D : V \to V, f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung ist und geben Sie die Abbildungsmatrix $M_D^{\mathcal{B},\mathcal{B}}$ an.

b) Gegeben sei nun der Differentialoperator

$$D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), f \longmapsto f'.$$

Bestimmen Sie zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Eigenfunktion mit Eigenwert $\lambda$.

**Aufgabe H13** (Funktionen von Matrizen (4 Punkte))

Ist $p$ ein Polynom in $x$, d.h.

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j$$

und $A$ eine $n \times n$ Matrix, so versteht man unter $p(A)$ die Matrix

$$p(A) := \sum_{j=0}^{n} \alpha_j A^j.$$

a) Zeigen Sie, dass für eine $n \times n$ Matrix $A$ und eine invertierbare Matrix $S$

$$S^{-1} p(A) S = p(S^{-1} A S)$$

gilt.

b) Was ist $p(A)$ für

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 5 \text{ ?}$$

c) Zeigen Sie, dass für einen Eigenwert $\lambda$ von $A$ die Zahl $p(\lambda)$ ein Eigenwert zu $p(A)$ ist.

**Aufgabe H14** (Jordansche Normalform (4 Punkte))

Bestimmen Sie zu den folgenden Matrizen die geometrischen und algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte und geben Sie eine Jordansche Normalform dazu an.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$