Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
08./09.05.2008

# 3. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

## Gruppenübung

**Aufgabe G7** (Test)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind und begründen Sie ihre Entscheidung:

(i) Für die $n \times n$ Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & 0 & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$ gilt $\det(A) = (-1)^{n^2-1}$.

(ii) Die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \\ \lambda & \lambda & \lambda \end{pmatrix}$ ist $0, \lambda, \lambda^3$ oder $\lambda^9$?

(iii) Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ist invertierbar.

**Aufgabe G8** (Eigenräume)

Gegeben sei die Marix

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren.

b) Bestimmen Sie alle Eigenräume.

c) Zeigen Sie, dass die Summe zweier Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten nicht wieder ein Eigenvektor ist.

**Aufgabe G9** (Polarkoordinaten)

Gegeben sei die Umformung von kartesischen Koordinaten $(x, y)$ in Polarkoordinaten $(r, \varphi)$

$$\begin{aligned} x(r,\varphi) &= r\cos\varphi \\ y(r,\varphi) &= r\sin\varphi. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \end{pmatrix}.$$

b) Bestimmen Sie die Determinante der Jacobimatrix.

c) Bestimmen Sie den Rang von $J$.

# Hausübung

**Aufgabe H9** (Permutationen und Leibnizregel (4 Punkte))

Gegeben seien die Permutaionen

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie die Anzahl der Fehlstände und das Signum von $\pi_1$ und $\pi_2$.
*Erinnerung:* Die Anzahl der Fehlstände ist $\#\{i < j \text{ mit } \pi(i) > \pi(j)\}$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Leibnizformel die Determinanten von

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

**Hinweis:** Überlegen Sie zuerst, in welchen Permutationen keine Nulleinträge stehen.

**Aufgabe H10** (Determinante (4 Punkte))

Berechnen Sie die folgenden Determinanten möglichst geschickt.

$$\text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H11** (Geometrie (4 Punkte))

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix der orthogonalen Projektion $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, welche auf die von $v_1$ und $v_2$ aufgespannte Ebene projiziert.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Abbildung $\Pi$.