Fachbereich Mathematik
Prof. K. Grosse-Brauckmann
D. Frisch

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
SS 2008
24./25.04.2008

2. Übungsblatt zur „Linearen Algebra II für Physiker“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Determinante)

Es seien beliebige quadratische komplexwertige Matrizen A und B gegeben. Beweise oder widerlege die folgenden Aussagen:

(a) $AA = \mathbb{1}_n \Longrightarrow \det(A) = \pm 1$.

(b) A ist nicht invertierbar $\Longrightarrow AB$ ist nicht invertierbar.

(c) $\det(A) + \det(B) = \det(A + B)$.

(d) $A^3 = 0 \Longrightarrow A = 0$.

(e) $A^3 = 0 \Longrightarrow \det(A) = 0$.

(f) $\det(A) \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ alle Einträge in A sind reell.

(g) $A^3 = 0 \Longrightarrow (\mathbb{1}_n - A)^{-1} = \mathbb{1}_n + A + A^2$.

Aufgabe G5 (Spat)

Seien

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad a_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}+1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}-1}{2} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Volumina der von a_1, a_2, a_3 und a_2, a_3, a_4 aufgespannten Spate.
Deuten Sie ihr Ergebnis geometrisch.

Aufgabe G6 (Lineares Gleichungssystem)

Bestimmen Sie für ein geeignetes $m \in \mathbb{N}$ eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times 3}$ und einen Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ so, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ die Lösungsmenge

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

hat.

Hausübung

Aufgabe H6 (Determinante)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad D = A^T \quad E = A \cdot A$$

Aufgabe H7 (Lineares Gleichungssystem (4 Punkte))

Gegeben sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 12 & 9 & 1 \\ 1 & 10 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie Rang(A) und Kern(A).

(b) Bestimmen Sie die alle Lösungen des linearen Gleichungssystems $Ax = b$.

Aufgabe H8 (Zum Satz für implizite Funktionen)

Wir wollen Ihnen an einem Beispiel darstellen, was der Satz für implizite Funktionen im linearen Fall besagt (vgl. 4.14 der Vorlesung oder 4.14.2 im Skript). Gegeben sei die Gleichung

$$ax + 2y + z = 1, \tag{1}$$

mit einem Parameter $a \in \mathbb{R}$.

(a) Es sei $M_a \subset \mathbb{R}^3$ die Lösungsmenge von (1). Was ist M_a geometrisch? Für welchen Wert von a steht M_a senkrecht auf der y,z-Ebene?

(b) *Implizite Darstellung*: Geben Sie eine Funktion $f_a \colon \mathbb{R}^3 \to \dots$ an, so dass gilt

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M_a \quad \Longleftrightarrow \quad f_a(x,y,z) = 0.$$

(c) *Graphendarstellung*: Können Sie eine Funktion $x_a(y,z) \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bestimmen, so dass $f_a(x,y,z) = f_a(x_a(y,z),y,z) = 0$ ist? Skizzieren Sie diesen Graphen z.B. für $a = 3$. Falls eine solche Darstellung nicht existiert (Skizze von M_a!), gibt es dann eine Graphendarstellung $y(x,z)$ oder $z(x,y)$?

(d) Schreiben Sie das Gleichungssystem (1) in der Form

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b,$$

d.h. geben Sie eine Matrix A und einen Vektor b an.

(i) Bestimmen Sie den Rang von A. Ist dieser von der Wahl von a unabhängig?

(ii) Bestimmen Sie in diesem Fall die Matrizen A_1 und A_2 aus der Vorlesung (4.14.2).

(iii) Laut Vorlesung muss A_1 so gewählt werden, dass A_1 invertierbar ist. Ist A_1 im vorliegenden Fall immer invertierbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Spaltenvertauschung an, sodass A_1 invertierbar ist. Welcher Graphendarstellung ($y(x,z)$ oder $z(x,y)$) entspricht das?