



## Probeklausur „Lineare Algebra für Physiker“

Name: .....	Studiengang: .....
Vorname: .....	Semester: .....
Matrikelnummer: .....	

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	Σ	Note
Punktzahl	7	4	10	7	13	4	10	55	
erreichte Punktzahl									

**1. Aufgabe**(Test) (7 Punkte)

Jede Aufgabe ist mit "wahr" oder "falsch" zu beantworten. Tragen Sie Ihre Antwort durch ein entsprechendes Kreuz in die nachfolgenden Kästchen ein. Eine richtige Antwort gibt 0.5 Punkte, eine falsche -0.5 Punkte. Keine Antwort gibt 0 Punkte. In einer Unteraufgabe a), b) oder c) können nicht weniger als 0 Punkten erzielt werden. Keine Begründung notwendig!

a) Sei  $A$  eine  $n \times n$  Matrix über  $\mathbb{K}$  und  $T_A : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n, x \mapsto Ax$  die induzierte lineare Abbildung. Weiter sei  $0 \neq b \in \text{Bild}(T_A)$ . Entscheiden Sie:

	Wahr	Falsch
$Ax = b$ ist stets lösbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$Ax = b$ ist niemals lösbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$Ax = b$ ist nicht immer lösbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$Ax = b$ ist stets eindeutig lösbar.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

b) Seien  $A, B$   $n \times n$  Matrizen mit  $n \geq 2$ . Dann gilt immer

	Wahr	Falsch
$\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\det(AB) = \det(A) + \det(B)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\det(\lambda A) = \lambda \det(A)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

- c) Sei  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $T : V \rightarrow V$  eine lineare Abbildung. Für  $x, y \in V \setminus \{0\}$  und  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  gelte

$$T(x) = \lambda x \quad \text{und} \quad T(y) = \mu y.$$

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr ist:

	Wahr	Falsch
$x + y$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda + \mu$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$-5y$ ist Eigenvektor zum Eigenwert $-5\mu$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x = y \Rightarrow \lambda = \mu$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\lambda \neq \mu \Rightarrow x, y$ sind linear unabhängig	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$x, y$ sind linear unabhängig $\Rightarrow \lambda \neq \mu$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
$\lambda x + \mu y$ ist Eigenvektor von $T$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

**2. Aufgabe**(Vektoren in einer Ebene) (4 Punkte)

Sei  $V = \mathbb{R}^3$  und seien  $x, y, z \in V$ . Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

genau dann in einer Ebene liegen, wenn  $\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$  ist.

**3. Aufgabe**(Basiswechsel) (10 Punkte)

Sei  $V = \mathbb{R}^3$  mit kanonischer Basis  $\mathcal{E}$  und  $F : V \rightarrow V$  die Spiegelung an der durch die

Vektoren  $b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  aufgespannten Ebene.

- a) Sei  $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ . Zeigen Sie, dass  $\mathcal{B}$  eine Basis von  $V$  ist.

b) Bestimmen Sie  $M_F^{\mathcal{B}, \mathcal{B}}$ .

c) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen  $M_{\text{id}}^{\mathcal{E}, \mathcal{B}}$  und  $M_{\text{id}}^{\mathcal{B}, \mathcal{E}}$ . Beachten Sie die Konvention  $M_T^{\text{alt, neu}}$ .

d) Bestimmen Sie  $M_F^{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ .

**4. Aufgabe**(Ähnliche Matrizen) (7 Punkte)

Es sei  $V$  ein Vektorraum und  $R, T : V \rightarrow V$  lineare Abbildungen.

- a) Bestimmen Sie die Determinante ihrer Abbildungsmatrizen bezüglich der kanonischen Basis  $\mathcal{E}$ :

$$M_R^{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad M_T^{\mathcal{E}, \mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 7 & -1 & 4 & 0 \\ 9 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

- b)  $R$  und  $T$  heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare lineare Abbildung  $S : V \rightarrow V$  gibt, sodass  $T = S^{-1}RS$ . Sind  $R$  und  $T$  ähnlich? Geben Sie eine Begründung.

**5. Aufgabe**(Eigenwerte und Eigenvektoren) (13 Punkte)

- a) Berechnen Sie für die nachfolgende Matrix das charakteristische Polynom, sowie alle Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & i \end{pmatrix}.$$

- b) Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix an, die einen Eigenwert  $\lambda$  mit geometrischer Vielfachheit  $gV(\lambda) = 1$  und algebraischer Vielfachheit  $aV(\lambda) = 3$  besitzt (mit Begründung, d.h., mit Angabe des charakteristischen Polynom und aller Eigenvektoren).

**6. Aufgabe**(Diagonalisierbarkeit) (4 Punkte)

Welche Matrix besitzt eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren?

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$     b)  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Geben Sie eine kurze Begründung.

**7. Aufgabe**(Matrizen) (10 Punkte)

Welche der folgenden Matrizen sind symmetrisch, selbstadjungiert, orthogonal, unitär, normal? Achtung: eine Matrix kann auch mehrere Eigenschaften haben. Kreuzen Sie bitte in der nachfolgenden Tabelle alle Eigenschaften an, die erfüllt sind. Für jede falsche Antwort gibt es  $-0.5$  Punkte. Keine Begründung notwendig!

Matrix	symmetrisch	selbstadjungiert	orthogonal	unitär	normal
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & 1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$					
$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$					