Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Martin
Dipl.-Math. A. Peter
Dipl.-Math. C. Schönberger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
25./26.06.08

6. Tutoriumsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Dies ist ein Wiederholungstutorium, in dem wir versucht haben, Aufgaben zu (fast) allen Bereichen zusammenzustellen. Es steht dir frei, zunächst die Aufgaben herauszupicken, die dir am besten gefallen, oder von denen du glaubst, dass du in diesem Bereich noch Nachholbedarf hast. Es steht absichtlich nun nicht mehr bei jeder Aufgabe ein Stichwort unter dem ihr die passende Stelle im Skript findet, da wir auch in der Klausur einen gewissen Überblick erwarten und ihr selbst herausfinden müsst, um welchen Problemtyp es sich handelt.

Gruppenübung

Aufgabe G7 (Alternierende Summe von Quadraten)
Beweise die folgende Aussage für $n \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \binom{n+1}{2}$$

Aufgabe G8 (Minimale Spannbäume und Kürzeste-Wege-Bäume)
In einem ungerichteten Netzwerk nennen wir einen Spannbaum, in dem der eindeutige Weg von jedem einzelnen Knoten zu jedem anderen Knoten ein kürzester Weg ist, *Kürzester-Wege-Baum.* Ist ein minimaler Spannbaum in einem Graph auch immer ein Kürzester-Wege-Baum?
Beweise oder widerlege diese Behauptung.

Aufgabe G9 (Aktualisierung eines Spannbaums)
Sei T^* ein minimaler Spannbaum für das ungerichtete Netzwerk $N = (V, A)$. Beschreibe einen Algorithmus, um einen minimalen Spannbaum in dem neuen Netzwerk zu finden, das durch folgende Szenarien entsteht:

(a) Wir löschen eine Kante $(i, j) \in A$ aus dem Netzwerk.

(b) Wir fügen eine neue Kante (i, j) zu A hinzu.

Zeige, dass deine Algorithmen korrekt einen neuen Spannbaum finden, und benenne ihre Laufzeiten.

Aufgabe G10 (Farbenfroh)
Ein Elektrogeschäft möchte sein Schaufenster mit 5 roten, 3 blauen, 4 grünen und 2 gelben Glühlampen in einer Reihe dekorieren. Wie viele Möglichkeiten gibt es, wenn

(a) es keine weiteren Einschränkungen gibt?

(b) die Glühlampen gleicher Farbe jeweils neben einander angeordnet werden sollen?

(c) die Reihe mit 2 roten Glühlampen anfangen und aufhören soll?

(d) die 3 blauen nebeneinander stehen sollen?

Aufgabe G11 (Knotengrad)

Beweise die folgende Aussage:
In jedem endlichen einfachen Graphen mit mindestens zwei Ecken gibt es (mindestens) zwei Ecken mit gleichem Grad.

Aufgabe G12 (Binäre Suche)

Betrachte folgenden Algorithmus. Eingabewerte sind ein Array der Länge N, das nach Größe sortierte Zahlen enthalten soll und eine Zahl `value`. Verstehe, was der Algorithmus tut, beschreibe dies in Worten und versuche auch dir ihn an einer Skizze zu verdeutlichen. Welche Laufzeit hat dieser Algorithmus? Ist seine Laufzeit polynomial in der Länge des Arrays?

```
BinarySearch(A[0..N-1], value) {
        low = 0
        high = N - 1
        while (low <= high) {
            mid = (low + high) / 2
            if (A[mid] > value)
                high = mid - 1
            else if (A[mid] < value)
                low = mid + 1
            else
                return mid // found
        }
        return -1 // not found
    }
```

Aufgabe G13 (Ein EM-Tippspiel)

An einem EM-Tippspiel nehmen 55 Freunde teil. Einige wetten, dass Deutschland die EM gewinnt, einige setzen auf Italien, andere auf Spanien und weitere auf die Türkei. Viele können sich nicht entscheiden und setzen auf mehrere Teams. 2 haben keine spezifische Meinung und sagen, dass eine der vier genannten Mannschaften Europameister wird. 5 sagen, dass Deutschland oder Italien oder Spanien Europameister werden. 3 behaupten, dass Italien oder Spanien oder die Türkei gewinnen, 4 sind der Meinung, dass Deutschland oder Spanien oder die Tükei gewinnt und 5 sind der festen Überzeugung, dass Deutschland oder Italien oder die Türkei das letzte Spiel für sich entscheiden. 8 der Freunde setzen darauf, dass Deutschland oder die Türkei gewinnen, 12 glauben, dass Italien oder Spanien Europameister werden, 7 behaupten, dass Italien oder die Türkei das Finale gewinnen werden, 17 sind für Deutschland oder Spanien, 4 setzen auf Spanien und Türkei und 9 auf Italien und Deutschland. Andere Tippkombinationen gibt es nicht. Es glauben insgesamt 30 der Tipprunde an Italien, 25 an Spanien und 10 an die Türkei. Wie viele Mitspieler glauben, dass Deutschland Europameister werden könnte?

Aufgabe G14 (Gastgeberproblem)

Ein Gastgeber lädt einige Leute zum Abendessen ein. Damit es ein Erfolg wird, sollen nur Personen am großen runden Tisch nebeneinander sitzen, die einander mögen. Er fragt sich ob dies überhaupt immer möglich ist und wenn ja, wie er eine solche Sitzordnung findet.

Betrachte dieses Problem graphentheoretisch. Stelle einen passenden Graphen auf. Welchem graphentheoretischen Problem entspricht das Problem des Gastgebers. Gibt es eine solche Sitzordnung immer?

Aufgabe G15 (Kommunikationsnetze)

Angenommen es gibt eine Firma A, die über ein großes Kommunikationsnetzwerk verfügt, von dem sie Leitungen vermietet, und eine Firma B, die solche Leitungen mieten will. Für jede Leitung seien die Mietkosten bekannt. Firma B möchte, dass alle Schaltstellen des Netzwerkes verbunden sind, und dies zu einem möglichst geringen Preis.

Wie kann man ein solches Sub-Netzwerk finden?

Aufgabe G16 (Arbeitsteilung)

Wir betrachten ein Computersystem mit zwei Prozessoren, die unterschiedlich sein können. Wir wollen ein großes Programm auf diesem Computer laufen lassen. Dieses enthält verschiedene Module, die während der Ausführung interagieren. Die Kosten, die bei der Ausführung jedes Moduls auf den Prozessoren entstehen, seien vorher bekannt und können für die beiden Prozessoren unterschiedlich sein (durch Unterschiede im Speicher, Geschwindigkeit, ...). Wir notieren diese mit α_i bzw. β_i für Modul i und Prozessor 1 bzw. 2. Die Zuweisung verschiedener Module zu verschiedenen Prozessoren kann zu weiteren Kosten führen, da Interprozessor-Kommunikation notwendig werden kann. Seien c_{ij} die Kosten, die entstehen, wenn Modul i und j auf verschiedenen Prozessoren laufen. Wir wollen eine Zuweisung der Module zu den beiden Prozessoren finden, so dass die Gesamtkosten aus Rechenkosten und Interaktionskosten minimal sind. Wie kann man eine solche finden? Die folgende Tabelle gibt Beispieldaten. Bestimme anhand derer eine kostenminimale Zuweisung.

i	1	2	3	4
α_i	6	5	10	4
β_i	4	10	3	8

c_{ij}	1	2	3	4
1	0	5	0	0
2	5	0	6	2
3	0	6	0	1
4	0	2	1	0

Aufgabe G17 (Produktionsplanung)

Die folgende Tabelle zeigt eine Anzahl möglicher Schichten für die Fahrer eines Busunternehmens. Wir wollen bei möglichst geringen Kosten sicherstellen, dass immer (zwischen 9:00 und 17:00) mindestens ein Fahrer Dienst hat.

Formuliere dies als ein geeignetes graphentheoretisches Problem und finde den kostenminimalen Einsatzplan.

Beginn - Ende	9-13	9-11	12 -15	12-17	14 -17	13-16	16-17
Kosten	30	18	21	38	20	22	9

Aufgabe G18 (Müllabfuhr)

Die Müllabfuhr einer Stadt möchte beim Mülleinsammeln um Zeit zu sparen durch jede Straße nur genau einmal fahren und dann wieder im Depot ankommen. Ist dies auf jeden Fall möglich? Welche Eigenschaften muss das Straßennetz haben, damit dies möglich wird?