Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. A. Martin
Dipl.-Math. A. Peter
Dipl.-Math. C. Schönberger

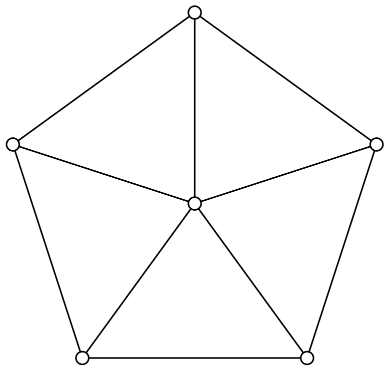
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
11./12.04.08

5. Tutoriumsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zum Warm werden)



Betrachte den folgenden Graphen $G = (V, E)$.

(a) Zeichne einen Spannbaum T ein.

(b) Zeichne (mit einer anderen Farbe) den dualen Graphen G^* zu G ein.

(c) Färbe im dualen Graphen alle Kanten, die Kanten in $E \setminus T$ entsprechen.
(D.h. alle Kanten in G^*, die nicht Kanten in T kreuzen.)
Welche Struktur bildet diese Kantenmenge?

Aufgabe G2 (Eulerformel für Planare Graphen)

Sei $G = (V, E)$ ein planarer zusammenhängender Graph. Wir bezeichnen die Anzahl der Knoten mit n, die Anzahl der Kanten mit e und die Anzahl der Flächen (in einer Einbettung) mit f. Dann gilt:

$$n - e + f = 2.$$

(a) Überprüfe diese Formel an dem Graphen aus Aufgabe G1.

(b) Beweise die Eulerformel mit folgenden Schritten.

- Sei $T \subseteq E$ ein Spannbaum in G.
  Sei $G^* = (V^*, E^*)$ der duale Graph von G.
  Betrachte die Menge $T^* \subseteq E^*$ der Kanten, die Kanten in $E \setminus T$ entsprechen.
  Zeige, dass T^* ein Spannbaum in G^* ist.
- Erinnere dich, dass in jedem Baum die Knotenanzahl um eins größer ist als die Kantenanzahl.
  Wende dies auf die Bäume T und T^* an.
- Folgere daraus die Eulerformel.

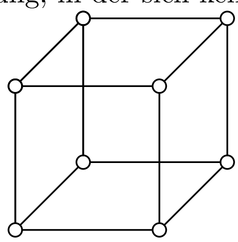
Aufgabe G3 (Planarität)

(a) Zeige, dass K_5 nicht planar ist.

(b) Irgendwo tief in den Wäldern, leben 3 Erzfeinde A, B und C. Wir sind damit beauftragt worden, die Häuser dieser 3 Personen jeweils mit den Ressourcen Gas, Wasser und Elektrizität zu verbinden (die jeweils nur an einem Ort vorhanden sind). Aber um Konflikte zu vermeiden, wollen wir nicht, dass sich die Verbindungswege schneiden. Ist das möglich?

Aufgabe G4 (Würfel)

Betrachte den Graphen des Würfels. In dieser Darstellung kreuzen sich viele Kanten. Zeige, dass er dennoch planar ist und finde eine grafische Darstellung, in der sich keine Kanten kreuzen.



Dies ist übrigens für alle platonischen Körper der Fall.

Aufgabe G5 (Planare Bäume)

Zeige, dass jeder Baum planar ist und für jede Einbettung $f = 1$ gilt.

Aufgabe G6 (* Eigenschaften planarer Graphen)

Sei G ein einfacher planarer Graph mit Knotenanzahl $n \geq 3$. Zeige, dass dann die folgenden Aussagen gelten.

(a) G hat höchstens $3n - 6$ Kanten.

(b) G hat eine Ecke mit Grad höchstens 5.

Gelten auch die Umkehrungen?