Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin
Dipl.-Math. Andrea Peter
Dipl.-Math. Christine Schönberger

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

SS 2008
18./19.06.08

6. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G19 (Aktualisierung eines Flusses)
Es sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Quelle s und Senke t und ganzzahligen Kapazitäten $c_a \geq 0$ für alle $a \in A$. Außerdem sei ein ganzzahliger maximaler Fluss x in G gegeben. Nun wird die Kapazität einer einzelnen Kante

(a) um 1 erhöht,

(b) um 1 verringert.

Gebe einen Algorithmus der Komplexität $\mathcal{O}(|V| + |A|)$ an, der einen maximalen Fluss in dem jeweiligen veränderten Netzwerk bestimmt.

Aufgabe G20 (Eigenschaften von Schnitten)
Sei $G = (V, E)$ ein Netzwerk mit positiven Kantengewichten.

(a) Zeige, dass die Schnitt-Kapazitätsfunktion $c : \mathcal{P}(V) \to \mathbb{R}_+$, welche jedem Schnitt seine Kapazität zuordnet, *submodular* ist, d.h. für alle Schnitte $X, A \subseteq V$ gilt

$$c(X) + c(A) \geq c(X \cup A) + c(X \cap A).$$

(b) Seien X und A minimale Schnitte in G und $X \cap A$ nichtleer. Zeige, dass dann auch $X \cup A$ und $X \cap A$ minimale Schnitte sind.

Aufgabe G21 (Minimalfluss-Problem)
Sei D ein gerichteter Graph. Wir haben für jede Kante $a \in A$ obere Schranken u_a und untere Schranken l_a gegeben. Gesucht ist nun ein Fluss zwischen den zwei Knoten s und t, so dass der Fluss minimal ist und für alle Kanten die Schranken u und l eingehalten werden. Zeige, wie man dieses Problem lösen kann, wenn man einen Algorithmus für das Max-Flow-Problem zur Verfügung hat.

Aufgabe G22 (Sortieren)
Überlege dir einen eigenen Sortieralgorithmus. Beschreibe ihn mit Worten, gebe seinen Pseudocode an und schätze die Laufzeit ab. Nenne Vor- und Nachteile (Speicher, Laufzeit, Implementierungsaufwand,...) gegenüber den dir bekannten Sortieralgorithmen und/oder denen deiner Kommilitonen.

Hausübung

Bemerkung: Die Inhalte dieser Hausübung sind klausurrelevant. Da die Abgabe der Hausübungen allerdings erst in der letzten Vorlesungswoche erfolgen kann, zählen die Aufgaben nicht mehr zu den zur Klausurzulassung relevanten Aufgaben. Ihr dürft sie trotzdem gerne zur Korrektur abgeben, erhaltet die Übungen dann aber wahrscheinlich erst nach der Klausur zurück.

Aufgabe H24 (Satz von Menger)

(a) Ein gerichteter Graph $D = (V, A)$ heißt k-fach stark bogenzusammenhängend, wenn für jedes Paar (s, t) von Knoten und jede Bogenmenge $B \subseteq A$ mit $|B| \leq k - 1$ der gerichtete Graph $(V, A \setminus B)$ einen gerichteten (s, t)-Weg enthält. Beweise:

Satz von Menger (Bogenform) Ein gerichteter Graph ist genau dann k-fach stark bogenzusammenhängend, wenn es zu jedem Paar (s, t) von Knoten mindestens k gerichtete (s, t)-Wege gibt, die keinen Bogen gemeinsam haben.

(b) Ein Digraph $D = (V, A)$ heißt k-fach knotenzusammenhängend, wenn für jedes Paar (s, t) von Knoten und jede Knotenmenge $W \subseteq V$ mit $|W| \leq k - 1$ der Digraph $D - W$ einen gerichteten (s, t)-Weg enthält. Beweise:

Satz von Menger (Knotenform) Ein Digraph ist genau dann k-fach knotenzusammenhängend, wenn es zu jedem Paar (s, t) von Knoten mindestens k gerichtete (s, t)-Wege gibt, die keinen Zwischenknoten gemeinsam haben.

(c) Ersetze in (a) und (b) *gerichtet* jeweils durch *ungerichtet*. Gelten beide Aussagen dann immer noch?

Aufgabe H25 (Modellierung)

Eine Zeitung möchte von der Fußballeuropameisterschaft berichten. Die einzelnen Veranstaltungen sind in verschiedenen Stadien in der Schweiz und in Österreich. Für jedes Spiel kennen wir Anfangszeit, maximale Dauer und den Austragungsort. Außerdem kennen wir die (geschätzten) Reisezeiten zwischen den Stadien. Um Kosten zu sparen, möchte die Redaktion mit möglichst kleiner Besetzung vor Ort sein. Wie kann die Redaktion eine möglichst kleine Besetzung finden?

Aufgabe H26 (Sortieren)

In dieser Übung sollt ihr euch einen weiteren Sortieralgorithmus selbst erarbeiten:

Algorithmus QuickSort(a,l,r)
Input: Ein Array a der Länge n mit $a[i] \in \mathbb{Z}$, untere und obere Grenzen l, r mit $1 \leq l \leq r \leq n$.
Output: Das Array a mit $a[l] \leq a[l+1] \leq \ldots \leq a[r]$.

(1) Setze $i = l - 1$ und $j = r$.

(2) `While` $i < j$ `Do`

(3) `Do` i = i + 1 `While` $a[i] \leq a[r]$.

(4) `Do` j = j - 1 `While` ($a[j] \geq a[r]$ und $j \geq i$).

(5) Tausche $a[j]$ und $a[i]$.

(6) `End While`

(7) Tausche $a[i]$ und $a[r]$.

(8) `If` $l < i - 1$ `Then` QuickSort $(a, l, i - 1)$.

(9) `If` $i + 1 < r$ `Then` QuickSort $(a, i + 1, r)$.

(10) Gib a aus.

Der erste Aufruf erfolgt mit QuickSort(a,1,*length*(a)).

(a) Erläutere allgemein das Prinzip von Quicksort.

(b) Sortiere die folgende Zahlenfolge (das kleinste Element an den Anfang) mit Quicksort. (12, 3, 8, 13, 5, 2, 9, 4, 5, 3, 7)

(c) Beschreibe allgemein die Gestalt von zu sortierenden Schlüsselfolgen, so dass Quicksort den maximalen Aufwand $O(n^2)$ bzw. den minimalen Aufwand $O(n \log(n))$ benötigt und konstruiere aus den ersten zehn natürlichen Zahlen jeweils eine Beispielfolge.

Aufgabe H27 (Anagramme finden)

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit sogenannten Anagrammen: Zwei Worte A und B sind Anagramme voneinander, wenn beide genau die selben Buchstaben enthalten, und zwar jeweils mit der gleichen Häufigkeit. Dabei wird nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden. Ein paar Beispiele: "Logarithmus" und "Algorithmus", "sortieren" und "storniere", "Liste" und "steil", "Nepal" und "plane". Hingegen ist z.B. "Krume" kein Anagramm von "Kummer", weil der Buchstabe 'm' nicht die gleiche Häufigkeit hat. Wir nehmen nun an, wir erhalten ein Wörterbuch mit vielen Wörtern, und müssen alle Anagramme darin finden. Überlege dir einen Algorithmus, mit dem du diese Aufgabe möglichst effizient lösen kannst. Beschreibe den Algorithmus in Worten oder in Pseudocode. Deine Beschreibung sollte so genau sein, dass eine Studienkollegin oder ein Studienkollege damit den Algorithmus alleine implementieren könnte. Welche asymptotische Laufzeit hat dieser Algorithmus im schlechtesten Fall? Von welchen Eigenschaften (Parametern) der gegebenen Menge von Wörtern hängt diese Laufzeit ab?

Erinnerung:
Bis zum **30.06.** müsst ihr euch beim zentralen Prüfungssekretariat zur **Klausur anmelden**!
Die Klausur findet am **08.07.08** von 14.15 bis 15.15 Uhr in Raum S1 03/226 statt. Als Hilfsmittel sind alle schriftlichen Unterlagen (Skript, Übungen, Bücher,...) zugelassen. Ihr werdet jedoch nicht die Zeit haben, alles nachzuschlagen. Schreibt euch am besten einen "Spickzettel" mit den wichtigsten Vorlesungsinhalten.
Zugelassen zur Klausur ist, wer mindestens 50% der Hausübungen sinnvoll bearbeitet hat.

Nutzt auch die Sprechstunden, um Fragen loszuwerden, den Stoff aufzuarbeiten und besser zu verstehen!
Sprechstunden finden zu folgenden Zeiten statt:

Wer?	Wo?	Wann?
Susanne Pape	S2 15 / 417	Mo, 10:00 - 11:00
Stephan Petsch	S2 15 / 217	Mo, 13:30 - 14:30 (in ungeraden Wochen)
Patrick Schmidt	S2 15 / 217	Mo, 13:30 - 14:30 (in geraden Wochen)
Andrea Peter	S2 15 / 315	Fr, 13:00 - 14:00
Christine Schönberger	S2 15 / 315	Fr, 13:00 - 14:00