Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin
Dipl.-Math. Andrea Peter
Dipl.-Math. Christine Schönberger

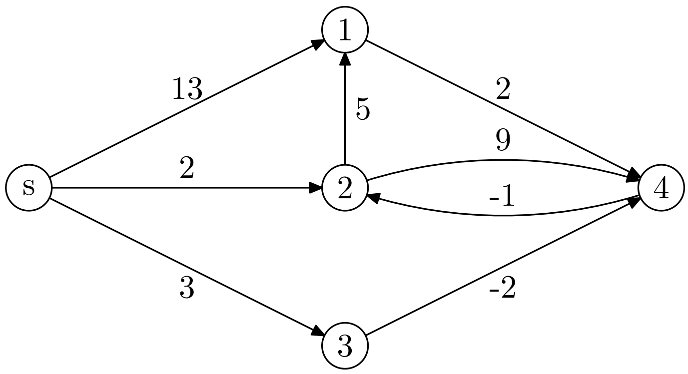
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
4./5.06.08

5. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G15 (Bellman)
Wende den Bellman Algorithmus an, um für den nachfolgenden Graphen das Problem des kürzesten Weges von Knoten s zu allen anderen zu lösen.



Aufgabe G16 (Kürzeste Wege)
Zeige, dass das Problem, einen kürzesten ungeraden Kreis in einem Digraphen mit nicht-negativen Bogengewichten zu finden, mit einem Algorithmus zur Bestimmung kürzester Wege gelöst werden kann.

Aufgabe G17 (Flusszerlegung)
Sei $D = (V, A)$ ein Digraph mit Bogenkapazitäten c_a für alle $a \in A$ und $s, t \in V, s \neq t$ zwei verschiedene Knoten. Bezeichne $\mathcal{P}$ die Menge aller gerichteten $(s,t)-$Wege in D und $\mathcal{C}$ die Menge aller gerichteten Kreise. Sei $x : A \to \mathbb{R}$ ein zulässiger Fluss mit $0 \leq x_a \leq c_a$ für $a \in A$.
Zeige: x ist ein zulässiger $(s,t)-$Fluss genau dann, wenn es Wege $P_1, \dots, P_p \in \mathcal{P}$ und Kreise $C_1, \dots, C_q \in \mathcal{C}$ sowie Zahlen $\lambda_1, \dots, \lambda_p > 0$, $\mu_1, \dots, \mu_q > 0$ gibt mit

$$x_{uv} = \sum_{\{i|uv \in P_i\}} \lambda_i + \sum_{\{i|uv \in C_i\}} \mu_i$$

Gebe eine obere Schranke für $p + q$ an.

Aufgabe G18 (Dining Problem)

Several families go out to dinner together. To increase their social interaction, they would like to sit at tables so that no two members of the same family are at the same table. Show how to formulate finding a seating arrangement that meets this objective as a maximum flow problem. Assume that the dinner contingent has p families and that the ith family has $a(i)$ members. Also assume that q tables are available and that the jth table has a seating capacity of $b(j)$.

Hausübung

Aufgabe H19 (Routenplanung)

Gegeben sei ein vereinfachtes Straßennetzwerk einer Stadt, in dem alle Straßen entweder parallel zur x-Achse oder zur y-Achse verlaufen. Der Aufwand, der durch das Benutzen einer Straße für einen Fahrer entsteht sei durch die Kosten auf den entsprechenden Kanten des Netzwerkes modelliert.

Leider gibt es in dieser Stadt keine Ampeln und es ist somit ein Problem an einer Kreuzung links abzubiegen. Die zusätzlichen Kosten, die durch ein Linksabbiegen entstehen seien konstant an jeder Kreuzung α.

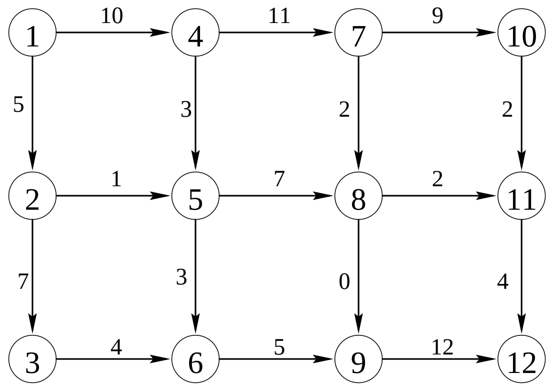


Abbildung 1: Stadtplan von Little-Manhattan

(a) Beschreibe einen Algorithmus, der das Kürzeste-Wege-Problem mit diesen Abbiegekosten löst.
`Hinweis:` Entwerfe einen neuen Graphen G^*, der einen Knoten für jede Kante (i, j) des Netzwerks hat und verbinde Knoten (i, j) und (j, k).

(b) Wende diesen Algorithmus auf das Beispiel der Stadt Little-Manhattan in Abbildung 1 an, wobei $\alpha = 5$ gesetzt sei und als Startknoten Knoten 1 gewählt ist.

Aufgabe H20 (Communication Problem)

A commander is located at one node p in an undirected communication network G and his subordinates are located at nodes denoted by the set S. Let u_{ij} be the effort required to eliminate arc (i, j) from the network. The problem is to determine the minimal effort required to block all communications between the commander and his subordinates. How can you solve this problem in polynomial time?

Aufgabe H21 (Netzwerkeigenschaften)

Sei $N = (D = (V, A), c)$ ein Netzwerk. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Die Antwort sollte entweder durch einen Beweis oder ein Gegenbeispiel bestätigt werden.

(a) Wenn $f : A \to \mathbb{R}$ ein maximaler Fluss für N ist, dann gilt entweder $f(u, v) = 0$ oder $f(u, v) = c(u, v)$ für jeden Bogen $(u, v) \in A$.

(b) N besitzt einen maximalen Fluß für den gilt, dass entweder $f(u, v) = 0$ oder $f(u, v) = c(u, v)$ für jeden Bogen $(u, v) \in A$.

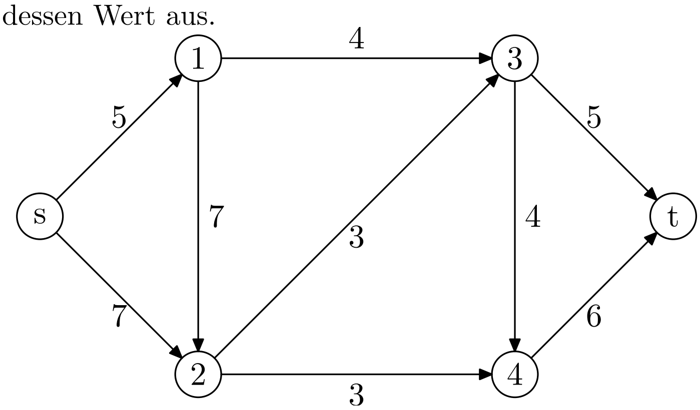
(c) Wenn alle Kapazitäten verschieden sind, dann ist der minimale Schnitt eindeutig.

(d) Wenn jede Kapazität mit einer positiven Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.

(e) Wenn zu jeder Kapazität eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}$ addiert wird, dann bleibt jeder minimale Schnitt ein minimaler Schnitt des geänderten Netzwerkes.

Aufgabe H22 (Augmentierende Wege)

Wende den Augmentierende-Wege-Algorithmus auf den folgenden Graphen an. Gib in jedem Schritt den augmentierenden Weg und die aktuellen Flusswerte x_{ij} an. Gib am Ende den maximalen Fluss und dessen Wert aus.



Aufgabe H23 (Zum Knobeln: Experimente im All)

Ein Professor soll mit einer Weltraumfähre ins All fliegen und dort einige Experimente durchführen. Es soll aus einer Menge von n Experimenten $E_1, \ldots, E_n$ gewählt werden; das Durchführen eines Experimentes E_i würde einen Ertrag von e_i Euro bringen. Wir haben eine Menge $W = \{W_1, \ldots, W_m\}$ von Werkzeugen zur Verfügung und jedes Experiment E_i benötigt eine bestimmte Teilmenge $K_i \subseteq W$ von diesen Werkzeugen zur Durchführung. Das Mitnehmen von einem Werkzeug W_i verursacht Kosten von w_i Euro. Gebe einen Algorithmus an, um zu bestimmen, welche Werkzeuge mitgenommen werden sollen und welche Experimente durchgeführt werden sollen damit der Gewinn - also die Gesamteinnahmen minus den Gesamtkosten - maximal wird. Begründe die Korrektheit dieses Algorithmus.