



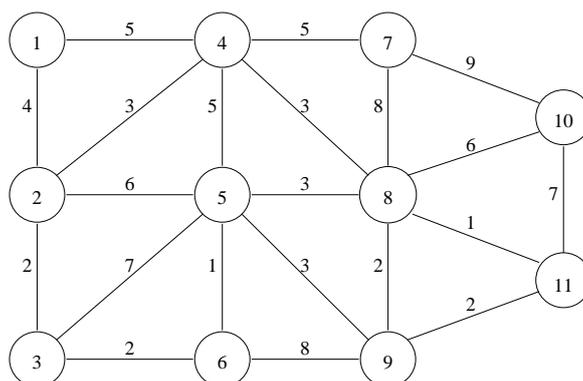
4. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G11 (Minimal aufspannender Baum)

Bestimme im folgenden Graphen einen minimal aufspannenden Baum

- (a) mit dem Algorithmus von Kruskal.
- (b) mit dem Algorithmus von Prim.



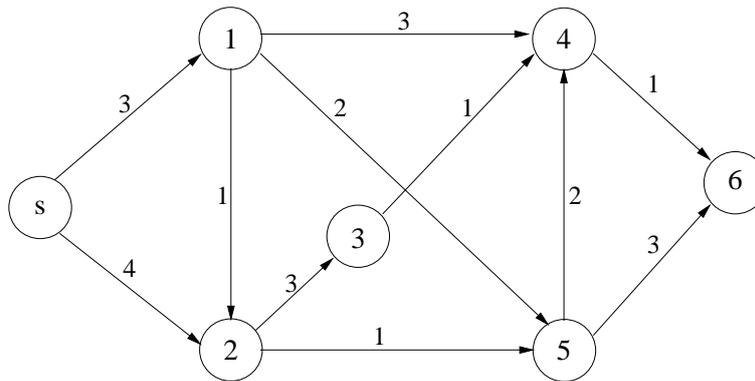
Aufgabe G12 (Eigenschaften von Bäumen)

- (a) Zeige: Jeder endliche Baum mit mindestens 2 Knoten hat mindestens 2 Blätter. Ein Blatt ist ein Knoten mit Grad 1.
- (b) Beweise, dass für einen Graphen $G = (V, E)$ mit $n \geq 2$ Knoten die folgenden Aussagen äquivalent sind:
 - i. G ist ein Baum, d.h. G ist zusammenhängend und enthält keinen Kreis.
 - ii. G ist zusammenhängend und enthält $n - 1$ Kanten.
 - iii. G enthält $n - 1$ Kanten, aber keinen Kreis.
 - iv. G ist minimal zusammenhängend (d.h. G ist zusammenhängend und $G \setminus \{e\}$ ist nicht zusammenhängend für alle $e \in E$).
 - v. G enthält keinen Kreis und bei Hinzufügen einer Kante wird genau ein Kreis erzeugt.
 - vi. Für je zwei Knoten u und v aus V gibt es genau einen $[u, v]$ -Weg in G .

Aufgabe G13 (Unsichere Kommunikation)

Eine Geburtstagsfeier steht an und du hast ein Geschenk im Auftrag einer Gruppe von n Personen – dich eingeschlossen – gekauft. Du möchtest nun die Kunde deines Erfolgs an alle Mitglieder der Gruppe weitergeben. Alle Gruppenmitglieder können untereinander kommunizieren; dabei besteht aber die Wahrscheinlichkeit p_{ij} , dass das Geburtstagskind vom Geschenk erfährt, wenn Mitglied i mit Mitglied j spricht. Wie sieht ein Algorithmus aus, der einen Kommunikationsplan so erstellt, dass alle Gruppenmitglieder vom Geschenk erfahren, aber die Wahrscheinlichkeit minimal ist, dass das Geburtstagskind etwas erfährt.

Aufgabe G14 (Kürzeste Wege)



- Berechne mit Hilfe des Dijkstra-Algorithmus einen kürzesten Weg von s zu allen anderen Knoten und gebe den Kürzesten-Wege-Baum an.
- Ist der Kürzeste-Wege-Baum eindeutig?
- Verändere das Gewicht von Bogen $(3, 4)$ auf -2 . Wende zur Berechnung der kürzesten Wege den Moore-Bellmann-Algorithmus (Grundversion) an und zeige, dass der Dijkstra-Algorithmus in diesem Fall nicht korrekt funktioniert.

Hausübung

Aufgabe H13 (Wiederholung)

Schreibe deine Lösung von Aufgabe G12 (b) schlüssig und mathematisch sauber auf.

Aufgabe H14 (Vom Verhältnis von Bäumen und Wäldern)

- Zeige, dass man mit einem Algorithmus für minimal aufspannende Bäume auch einen maximalen Wald bestimmen kann.
- Zeige, dass man mit einem Algorithmus zur Bestimmung maximaler Wälder auch einen minimal aufspannenden Baum berechnen kann.

Aufgabe H15 (Charakterisierung Kürzester Wege)

- Sei $D = (V, A)$ ein gerichteter Graph, der keine negativen Kreise enthält. Zeige: Ist $(s = i_0, i_1, \dots, i_k = t)$ ein kürzester Weg von s nach t , so ist auch jeder Teilweg (i_0, \dots, i_l) für $l = 1, \dots, k - 1$ ein kürzester Weg von s nach i_l .
- Zeige, dass diese Aussage nicht gilt, wenn der Graph negative Kreise enthält.

Aufgabe H16 (Reisen)

- In einem Land gibt es verschiedene Jugendherbergen. Der Weg von Jugendherberge i zu Jugendherberge j ist c_{ij} Tagesreisen lang. Wir betrachten nun Reisen von einer Jugendherberge

k zu einer anderen Jugendherberge l mit Zwischenstops in beliebig vielen anderen Jugendherbergen. Gebe einen Algorithmus an, der für alle Paare (k, l) von Jugendherbergen eine Reise berechnet, so dass der maximale Weg zwischen je zwei benachbarten Zwischenstops möglichst klein ist.

Hinweis:

Etwas formaler aufgeschrieben lautet der letzte Teil: Für eine Reise $R := \{k s_1, s_1 s_2, \dots, s_n l\}$ setzen wir $l(R) := \max_{ij \in R} c_{ij}$. Die Aufgabe ist nun für alle k und l ein minimales R zu finden, das k und l verbindet.

- (b) Ein Bauer transportiert eine Wagenladung Eier von einer Stadt zu einer anderen durch ein gegebenes Straßennetzwerk. Auf jedem Teil der Straße wird ein Teil der Eier zu Bruch gehen. Sei w_{ij} der Anteil der Eier, die auf dem Straßensegment (i, j) zerstört werden ($0 < w_{ij} < 1$). Wie müsste der Wagen des Bauern durch das Straßennetz gelenkt werden, damit möglichst viele ganze Eier auf dem Markt ankommen?

Aufgabe H17 (Zum Knobeln)

Ein Mann soll einen Wolf, eine Ziege und einen Korb Kohl über einen Fluss transportieren. Er hat jedoch nur ein Boot mit zwei Plätzen zur Verfügung. Ist es möglich, alle drei sicher auf das andere Ufer zu bringen?

Beachte, sowohl der Wolf und die Ziege als auch die Ziege und der Korb Kohl dürfen nie allein auf einer Seite des Flusses sein.

Formulieren Sie dieses Problem als Kürzestes-Wege-Problem. Falls es eine Lösung gibt, wie oft muss der Mann den Fluss überqueren?

Aufgabe H18 (Wiederholung)

Erstelle eine Liste der Aufgaben, Themen und Methoden, mit denen du Schwierigkeiten hattest - gerne auch mit Erläuterungen, worin die Schwierigkeit lag.

Wir wollen versuchen, ein Wiederholungstutorium zu erstellen, in dem wir gezielt auf diese Schwierigkeiten eingehen. Du darfst diese Liste natürlich auch anonym abgeben.