Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Martin
Dipl.-Math. Andrea Peter
Dipl.-Math. Christine Schönberger

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

SS 2008
23./24.04.08

2. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G4 (Induktion: vorwärts und rückwärts)

(a) Wie lautet der Wert der folgenden Summe?

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}.$$

Experimentiere ein bisschen, stelle eine Vermutung auf, und beweise sie per Induktion.

(b) We are convinced: All students in Darmstadt are charming.
And, as we are mathematicians, of course we prove this.
Since there exists at least one charming student, it suffices to prove the following theorem.
If a group consisting of n students contains at least one charming student then it contains only charming ones.
(IB) If a "group" of one student contains a charming one then for sure the assertion is correct.
(IH) Assume the assertion is proven for n.
(IS) Now we consider an arbitrary group of $(n+1)$ students. If one student leaves for a moment all the remaining students must be charming (because of our induction hypothesis). If he returns and another one leaves it turns out that the one who has left first must have been charming as well. Therefore, one obtains that all $(n+1)$ students must be charming.
This proves the assumption.

Aufgabe G5 (Inklusion-Exklusionsprinzip)

In einer Vorlesung sind 40 Studenten. 18 davon sind für Physik eingeschrieben und 23 für Mathematik. Einige sind auch für Informatik eingeschrieben. Die Anzahl der Studierenden, die sowohl für Mathematik als auch für Physik eingeschrieben sind, beträgt 9. Es gibt 7 Vorlesungsbesucher, die Physik und Informatik studieren und 12, die Mathematik und Informatik erlernen. 4 Leute sind sogar für alle drei Studiengänge immatrikuliert. Es ist klar, dass jeder der Vorlesungsbesucher entweder Mathe oder Physik oder Informatik studiert. Wie viele studieren Informatik?

Aufgabe G6 (Polynomiales versus exponentielles Wachstum)

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass $n^2 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$.
Zeige nun, dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $n^k < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_k$.

Aufgabe G7 (Pigeonhole principle)

(a) *easy:*
Given a run of $2n$ consecutive integers. If one selects more than n numbers from this set, there are at least two numbers that differ by n.

(b) *medium:*
Prove that no matter how one selects 55 integers $1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{55} \leq 100$, there will be some two that differ by 9, some two that differ by 10, a pair that differ by 12, and a pair that differ by 13. Surprisingly, there need not be a pair of numbers that differ by 11.

(c) *advanced:*
A chess master who has 11 weeks to prepare for a tournament decides to play at least one game every day but, in order not to tire himself, he decides not to play more than 12 games during any calendar week. Show that there exists a succession of consecutive days during which the chess master will have played exactly 21 games.

Hausübung

Aufgabe H6 (Fibonacci)

(a) Wir haben n Euro zum ausgeben. Jeden Tag kaufen wir entweder eine Süßigkeit für einen Euro oder ein Eis für zwei Euro. Auf wie viele verschiedene Arten können wir das Geld ausgeben?

(b) Wie lautet die Anzahl der Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die keine zwei aufeinander folgenden ganzen Zahlen beinhalten?

Welcher Zusammenhang besteht zu den Fibonacci-Zahlen?

Aufgabe H7 (Induktion und binomischer Lehrsatz)

Beweise den binomischen Lehrsatz per Induktion:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Aufgabe H8 (Inklusion-Exklusionsprinzip)

In der OWO findet eine Kneipentour statt. Auf einem späteren Feedbackbogen geben a Erstsemester an, dass sie es im Hobbit sehr gemütlich fanden, b Ersties waren von den Cocktails im Havana überzeugt, c gefiel es im Hotzenplotz und d haben sich über die Jumbo-Happy-Hour im Enchilada gefreut. Die Anzahl der Studienanfänger, denen es im Hobbit und im Havana gefiel, beträgt x. Es gibt y Ersties, die das Hobbit und das Hotzenplotz mögen, z die das Hobbit und das Enchilada toll finden, u die Havana und Hotzenplotz als nette Kneipen angeben, v die das Havana und das Enchilada überzeugend fanden und zu guter Letzt w Ersties, die es im Hotzenplotz und Enchilada genossen haben. Wir wissen nicht, wie viele Studienanfänger Hobbit, Havana und Enchilada präferieren, aber wir wissen, dass jeder mindestens eine der Kneipen mag. Es gibt keine Studierenden, die andere Kombinationen angegeben haben. Wie viele Erstsemester haben an der Kneipentour teilgenommen?

(a) Zeige anhand eines Beispiels, dass dies durch die Informationen, die wir haben, nicht eindeutig bestimmt ist.

(b) Beweise, dass wir wenigstens folgern können, dass die Anzahl der Erstsemester, die an der Kneipentour teilgenommen haben höchstens $a+b+c+d$ und mindestens $a+b+c+d-x-y-z-u-v-w$ beträgt.

Aufgabe H9 (Gitterkoordinaten)

Gegeben sei ein rechtwinkliges Gitter der Breite n und Höhe k, also mit $(n+1) \cdot (k+1)$ Gitterpunkten. Wie viele Möglichkeiten gibt es, von der linken unteren Ecke zur rechten oberen Ecke zu gelangen, wenn in jedem Schritt entweder ein Gitterpunkt weiter nach rechts oder nach oben gegangen werden darf?