



1. Übungsblatt zur „Algorithmischen Diskreten Mathematik“

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Kombinatorik)

- Herr Martin will seine 11 Doktoranden für ein Gruppenfoto in zwei Reihen anordnen. Wie viele Möglichkeiten hat er?
- Ein Bit kann zwei Zustände (0 oder 1) annehmen. Ein Byte besteht aus 8 Bits (z.B. 01101011). Wie viele verschiedene Bytes gibt es?
- Bei der Fußball-WM 2006 nahmen 32 Nationen teil. Wie viele Möglichkeiten gab es
 - für die Teilnehmer des Halbfinals (= Runde der letzten 4)?
 - für die Reihenfolge auf den ersten 4 Plätzen?
- Wie viele verschiedene 'Wörter' erhält man durch Umordnen der Buchstaben des Wortes MATHEMATIK?

Aufgabe G2 (Mengen, Mengen, Mengen)

- Seien $A = \{\text{rot, grün, blau}\}$, $B = \{\text{blau, rot, gelb}\}$. Bestimme die Vereinigung, den Durchschnitt, und die symmetrische Differenz dieser beiden Mengen.
- Zähle alle Teilmengen von A auf, und nummeriere sie systematisch durch. Wieviele Teilmengen erhält man?
- Wir haben drei Mengen mit 3, 6, bzw. 9 Elementen. Wieviele Elemente können ihre Vereinigung und ihr Durchschnitt enthalten?
- Es seien L, M, N Mengen. Mache zunächst eine Skizze und zeige anschließend die folgende Aussage:

$$(M \cap N) \cup L = (M \cup L) \cap (N \cup L).$$

Aufgabe G3 (Zwei Beweise zum Binomialkoeffizienten)

Seien $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$.

- Zeige die folgende Formel

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$

- mittels einer kombinatorischen Interpretation,
- indem du die algebraische Formel des Binomialkoeffizienten verwendest.

(b) Beweise weiter folgende Formel

$$\binom{n+1}{k+1} + \binom{n+1}{k} = \binom{n+2}{k+1}.$$

- i. indem du die algebraische Formel des Binomialkoeffizienten verwendest,
- ii. mittels einer kombinatorischen Interpretation.

Hausübung

Aufgabe H1 (Kombinatorik)

(a) Acht Personen warten vor der Essensausgabe in der Mensa.

- Auf wie viele Arten kann die Schlange zusammengesetzt sein?
- Drei der acht Personen wählen das Fischgericht. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die Auswahl dieser drei Personen?
- Die drei Fischliebhaber stehen direkt hintereinander. Wie viele Schlangen sind möglich?

(b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, 5 der 16 Hauptstädte der deutschen Bundesländer zu besuchen, wenn wir in Wiesbaden starten?

(c) Der Frosch Leo kann auf einem Papierstreifen mit nummerierten Feldern $| 1 | 2 | 3 | \dots | n |$ ein oder zwei Felder vorwärts springen. Zu Beginn steht er auf Feld 1. Auf wie viele Weisen kann Leo zum Feld n gelangen?

Aufgabe H2 (Symmetrische Differenz)

A und B seien beliebige Mengen.

- (a) Was ist die symmetrische Differenz von A und A ?
- (b) Zeige, dass

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

gilt.

Hinweis: Zeige zunächst, dass $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subseteq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ gilt, und danach die umgekehrte Inklusion.

(c) Bestimme die symmetrische Differenz von A und B , um eine Menge C zu erhalten. Nun bestimme die symmetrische Differenz von A und C . Welche Menge erhältst du? Schreibe diesen Sachverhalt in einer Formel auf und beweise ihn. Mache ihn dir zunächst anhand einer Skizze klar.

Aufgabe H3 (Induktion)

(a) Zeige mittels vollständiger Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{k=0}^n k = \frac{1}{2}n(n+1).$$

(b) Beweise die folgende Formel für $k, n \in \mathbb{N}$ mit $k \leq n$

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{j=k}^n \binom{j}{k}$$

Hinweis: Benutze das Ergebnis aus G3 b).

Aufgabe H4 (Taubenschlagprinzip)

Beweise die folgende Aussage: Unter je sechs natürlichen Zahlen gibt es stets zwei, deren Differenz durch 5 teilbar ist.

Aufgabe H5 (Zum Knobeln: Untreue Ehemänner)

In einem kleinen Bergdorf in den Abruzzen tritt der Pfarrer vor seine (vollständig versammelte) Gemeinde und spricht: „In diesem Dorf gibt es Männer, die ihre Frauen betrügen. Ich will keinen selbst enttarnen, aber ich bitte alle Ehefrauen, die sich sicher sind, dass ihr Mann sie betrügt, denselben im Morgengrauen vor die Tür zu setzen.“

Nun ist es im Grunde kein Geheimnis, welcher Mann welche Frau mit wem betrügt, der Klatsch und Tratsch funktioniert wie geschmiert und alle sind gut informiert. Alle bis auf die jeweilige Ehefrau. Das ist Ehrensache.

In den nächsten Tagen geht der Pfarrer am Morgen durch die Straßen und hält Ausschau nach ausgesetzten Männern. Aber erst am 60. Tag sitzen einige Männer draußen.

Wieviele sind es, und warum sind sich die Frauen plötzlich so sicher?