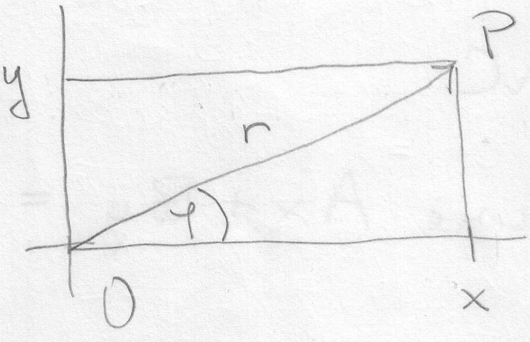
VII Lineare Algebra

1. Vektoren und Geraden im $\mathbb{R}^2$ (Kap. 7)



x Abszisse
von P
y Ordinate

$x = r\cos\varphi$

(r,φ) Polardarstellung $\quad y = r\sin\varphi$

des Punkts (x,y) (kartesische Koordinaten)

$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \tan\varphi = \frac{y}{x} \quad (\text{für } x \neq 0)$

$r = y \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \quad (y>0,\ x=0)$

$r = -y \quad \varphi = \frac{3\pi}{2} \quad (y<0,\ x=0)$

$r = 0 \quad \varphi = 0 \quad (x = 0 = y)$

Definition 1 Eine Gerade ist

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid Ax + By = C\}$$

wobei $A \neq 0$ oder $B \neq 0$.

Bem. Wenn $B \neq 0$, dann $y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$,

und wenn $A \neq 0$, dann $x = -\frac{B}{A}y + \frac{C}{A}$

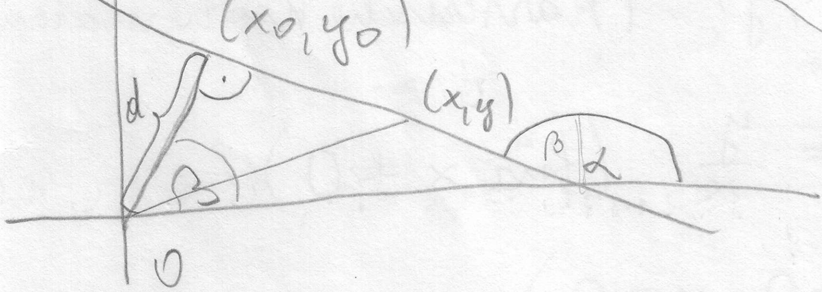
Für $\lambda \neq 0$ hat die Geradengleichung

$$\lambda A x + \lambda B y = \lambda C$$

die gleiche Lösungsmenge wie $Ax + By = C$.

Hessesche Normalform der Geradengleichung

$\frac{\pi}{2} + \beta = \alpha$



Gerade durch Winkel β und Abstand $d \geq 0$ der Geraden von 0

$$y - y_0 = \tan\alpha\,(x - x_0) \qquad (\dagger)$$

da $\cos\alpha = -\sin\beta$ und $\sin\alpha = \cos\beta$ gilt

$(\dagger) \Leftrightarrow \cos\alpha\,(y - y_0) = \sin\alpha\,(x - x_0) \Leftrightarrow$

$\cos\beta\,(x - x_0) + \sin\beta\,(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow$

$\cos\beta \cdot x + \sin\beta \cdot y = d$

(da $x_0 = d\cos\beta$ und $y_0 = d\sin\beta$ und $1 = \cos^2\beta + \sin^2\beta$)

Satz 2 Die Hessesche Normalform der Geradengleichung $Ax + By = C$ erhält man durch Multiplikation mit

$$\lambda := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{A^2+B^2}} & \text{wenn } C \geq 0 \\ \dfrac{1}{-\sqrt{A^2+B^2}} & \text{wenn } C < 0 \end{cases}$$

d.h. es gilt

$$\cos\beta \cdot x + \sin\beta \cdot y = d$$

mit $\cos\beta = \lambda \cdot A$, $\sin\beta = \lambda \cdot B$, $d = \lambda C \geq 0$.

Für einen Punkt $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ ist der Abstand zur Geraden gegeben durch

$$\cos\beta \cdot x + \sin\beta \cdot y - d$$

welches > 0, wenn (x, y) und $O = (0, 0)$ auf verschiedenen Seiten der Gerade liegen.

Bem. $\tan\alpha = -\cot\beta = -\dfrac{A}{B}$

Definition 3 Ein Vektor $\vec{v}$ im $\mathbb{R}^2$ ist eine Klasse von Strecken mit gleicher Richtung und gleicher Länge. Er wird durch ein Paar reeller Zahlen

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

dargestellt (x- und y-Komponente von $\vec{v}$) und durch Strecken mit beliebigem Anfangspunkt (x_0, y_0) und Endpunkt $(x_0 + v_x, y_0 + v_y)$ dargestellt.

Notation $(v_x, v_y)^T = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

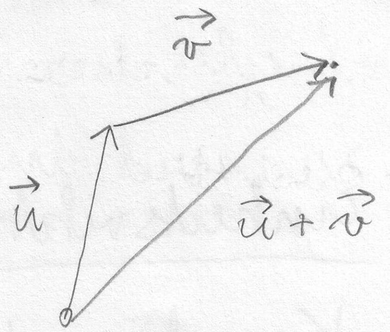
$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}^T = (v_x, v_y)$$

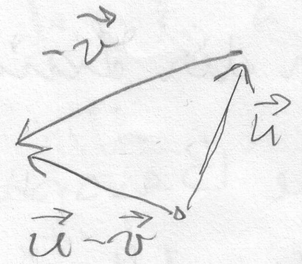
$\boxed{\text{Rechenregeln für Vektoren}}$

1. Summe und Differenz von $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$ und $\vec{v} = (v_x, v_y)^T$

$\vec{u} + \vec{v} = (u_x + v_x, u_y + v_y)^T$ und

$$\vec{u} - \vec{v} = (u_x - v_x, u_y - v_y)^T$$





2. Das Produkt eines Vektors $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ (einem Skalar) ist wieder ein Vektor, nämlich

$$\lambda \cdot \vec{u} = (\lambda \cdot u_x, \lambda \cdot u_y)^T$$

Für $\lambda = 0$ erhalten wir $\lambda \cdot \vec{u} = \binom{0}{0}$, den sog. Nullvektor.

Es gilt $\lambda \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \lambda \cdot \vec{u} + \lambda \cdot \vec{v}$

3. Die Länge des Vektors $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$ ist

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

Wie für den Absolutbetrag (nur etwas schwieriger zu zeigen) gilt

$$|\vec{u} + \vec{v}| \leq |\vec{u}| + |\vec{v}| \qquad |\vec{u} - \vec{v}| \geq \big| |\vec{u}| - |\vec{v}| \big|$$

Wir nennen $|\vec{u}|$ auch den Betrag oder die euklidische Norm von $\vec{u}$.

Vektoren der Länge 1 heißen Einheitsvektoren. Typische Beispiele sind die Koordinateneinheitsvektoren

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jeder Vektor $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$ ist eindeutig als Linearkombination

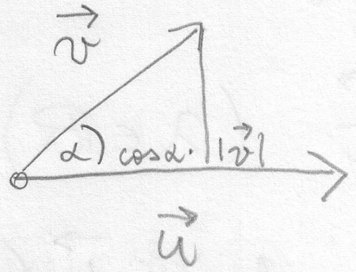
$$\vec{u} = u_x \cdot \vec{e}_1 + u_y \cdot \vec{e}_2$$

darstellbar (eindeutig heißt hier, daß $(\lambda_1 \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{u} \Rightarrow \lambda_1 = u_x$ und $\lambda_2 = u_y)$.

4. Das Skalarprodukt (bzw. inneres Produkt) von $\vec{u} = (u_x, u_y)^T$ und $\vec{v} = (v_x, v_y)^T$ ist

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$$

wobei α der Winkel zwischen $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ist.



Es gelten die Rechenregeln

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

$$(\lambda\cdot\vec{u})\cdot\vec{v} = \lambda\cdot(\vec{u}\cdot\vec{v}) = \vec{u}\cdot(\lambda\cdot\vec{v})$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$$

Es gilt

$$\vec{e}_i\cdot\vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i=j \\ 0 & \text{wenn } i\neq j \end{cases}$$

Satz 4 $\quad \vec{u}\cdot\vec{v} = u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y$

Also gilt für den eingeschlossenen Winkel α

$$\cos\alpha = \frac{u_x\cdot v_x + u_y\cdot v_y}{\sqrt{(u_x^2+u_y^2)\cdot(v_x^2+v_y^2)}}$$

Seien $\vec{u},\vec{v}$ verschieden von $\vec{0} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ und $\vec{v}$ senkrecht (orthogonal)

$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \iff \vec{u}$ und $\vec{v}$ haben die gleiche Richtung

$\vec{u}\cdot\vec{v} = -|\vec{u}|\cdot|\vec{v}| \iff \vec{u}$ und $\vec{v}$ haben die entgegengesetzte Richtung

Vektorielle Darstellung von Geraden

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{t} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

sei $\vec{r}_0 = \vec{r}_1 + \lambda_0 \cdot \vec{t}$ orthogonal zu $\vec{t}$ (dem Richtungsvektor der Geraden), d.h.

$\vec{r}_0 \cdot \vec{t} = 0 \iff \vec{r}_1 \cdot \vec{t} + \lambda_0 \cdot |\vec{t}|^2 = 0 \iff$

$\iff \lambda_0 = \dfrac{-\vec{r}_1 \cdot \vec{t}}{|\vec{t}|^2}.$

Wir nennen $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}_0}{|\vec{r}_0|}$ den Normalenvektor der Geraden. Der Abstand der Geraden zu O ist $d = |\vec{r}_0|$.

Die Hessesche Normalform der Geraden ist

$$(\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{n} - d = 0$$

Für einen beliebigen Punkt $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ist

$\vec{r} \cdot \vec{n} - d$ der Abstand des Punktes zur Geraden.

2. Vektoren, Geraden und Ebenen im $\mathbb{R}^3$ (Kap. 8)

Def. 1 Eine *Ebene* ist der Ort aller Lösungen einer Gleichung $\quad Ax + By + Cz = D$

wobei die reellen Zahlen A, B, C nicht alle gleich 0 sind.

Die Lösungsmenge ändert sich nicht, wenn man die Gleichung mit $\lambda \neq 0$ multipliziert.

Eine Gerade ist der Schnitt zweier Ebenen

$$Ax + By + Cz = D$$
$$\hat{A}x + \hat{B}y + \hat{C}z = \hat{D}$$

sodaß es kein $\lambda \neq 0$ gibt mit $(\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}) = (\lambda A, \lambda B, \lambda C)$.

Def. 2 Ein *Vektor* im $\mathbb{R}^3$ ist eine Klasse von Strecken gleicher Länge und gleicher Richtung. Er wird durch ein Tripel reeller Zahlen

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

den Komponenten u_x, u_y und u_z dargestellt und durch Strecken mit beliebigem Anfangspunkt (x_0, y_0, z_0) und Endpunkt $(x_0+u_x, y_0+u_y, z_0+u_z)$ repräsentiert.

Die Rechenregeln lassen sich wörtlich aus dem 2-dimensionalen Fall übertragen.

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Darstellung

$$\vec{u} = u_x \cdot \vec{e}_1 + u_y \cdot \vec{e}_2 + u_z \cdot \vec{e}_3$$

ist eindeutig.

Das Skalarprodukt $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ wobei α der eingeschlossene Winkel ist.

Es gilt wiederum $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ und somit aufgrund des Distributivgesetzes

<u>Satz 2</u> $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_x \cdot v_x + u_y \cdot v_y + u_z \cdot v_z$

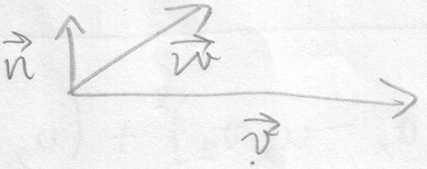
Der Cosinus des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossenen Winkels α berechnet sich als $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

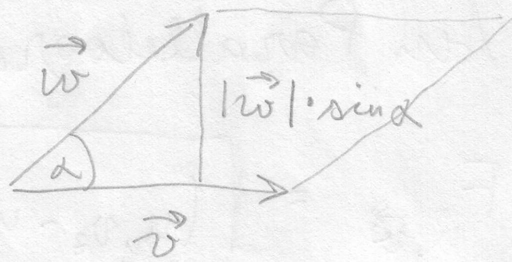
Spat- und Vektorprodukt

Für $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$ sei $\vec{n}$ derjenige Vektor, sodaß

1) Länge von $\vec{n}$ ist 1
2) $\vec{n}$ steht auf $\vec{v}$ und $\vec{w}$ senkrecht
3) $\vec{n}$ in diejenige Richtung weist, in die eine Rechtsschraube vorrückt, wenn man ihr die Drehung erteilt, die die Richtung $\vec{v}$ in die Richtung von $\vec{w}$ überführt.

$$F = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha$$





Vektorprodukt

$$\vec{v} \times \vec{w} = F \cdot \vec{n} = \left(|\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \sin\alpha\right) \cdot \vec{n}$$

(= 0 wenn $\vec{v}$ und $\vec{w}$ parallel, d.h. $\sin\alpha = 0$).

Es gelten die Rechenregeln

Satz 3

$$\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$$

$$\lambda \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (\lambda \cdot \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{v} \times (\lambda \cdot \vec{w})$$

$$\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{w} \times \vec{w}$$

Für die Komponenteneinheitsvektoren gilt

$$\vec{e}_1 \times \vec{e}_2 = \vec{e}_3$$

$$\vec{e}_2 \times \vec{e}_3 = \vec{e}_1$$

$$\vec{e}_3 \times \vec{e}_1 = \vec{e}_2$$

„$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ bildet ein Rechtssystem"

Satz 5

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

Der Flächeninhalt des von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms ist

$$F_{\vec{u},\vec{v}} = \sqrt{(u_y v_z - u_z v_y)^2 + (u_z v_x - u_x v_z)^2 + (u_x v_y - u_y v_x)^2}$$

Sind $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ verschiedene Vektoren dann gilt

$$\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) = (\vec{u} \cdot \vec{w})\,\vec{v} - (\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$$

Spatprodukt bzw. Determinante

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$$

Inhalt des von $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ aufgespannten Spats.

<u>Satz 6</u> $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] =$

$$= u_x v_y w_z + u_y v_z w_x + u_z v_x w_y - u_x v_z w_y + u_y v_x w_z - u_z v_y w_x$$

Das Spatprodukt ist in jeder Komponente <u>linear</u>
($f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ heißt <u>linear</u> gdw
$$f(\lambda \cdot \vec{u}) = \lambda \cdot f(\vec{u}) \qquad f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})\text{)}$$

Vektorielle Darstellung von Geraden und Ebenen

<u>Satz 6</u> Sei $\vec{r}_1$ ein Ortsvektor und $\vec{s}, \vec{t} \neq \vec{0}$ nicht parallele Vektoren. Dann ist

$$\{\vec{r}_1 + \lambda \vec{s} + \mu \vec{t} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} \text{ eine Ebene im } \mathbb{R}^3.$$

Zur <u>Hesseschen Normalform</u> der Ebene
$Ax + By + Cz = D$ gelangt man durch Einführung des Normalenvektors

$$\vec{s} \times \vec{t} = \vec{N} = A\vec{e}_1 + B\vec{e}_2 + C\vec{e}_3$$

der noch auf die Länge 1 zu normieren ist

$$\vec{n} := \pm |\vec{N}|^{-1} \cdot \vec{N} = \pm \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \vec{N}$$

wobei das Vorzeichen so gewählt wird, daß

$d := \vec{r}_1 \cdot \vec{n} \geq 0$ und $D = \pm |\vec{N}|$.

<u>Satz 7</u> Sei $\vec{r}_1$ ein Ortsvektor eines Punktes auf der Ebene $Ax + By + Cz = D$. Ihre Hessesche Normalform ist dann

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \vec{r}_1 \cdot \vec{n}$$

wobei die rechte Seite den Abstand der Ebene zum Ursprung angibt.

Für einen beliebigen Punkt $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ gibt $\vec{r} \cdot \vec{n} - \vec{r}_1 \cdot \vec{n} = (\vec{r} - \vec{r}_1) \cdot \vec{n}$ den Abstand zur Ebene an.

<u>Abstand zweier windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$</u>

$g_1: \vec{r}_1 + \lambda \vec{s} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

$g_2: \vec{r}_2 + \mu \vec{t} \quad (\mu \in \mathbb{R})$

$$\vec{\ell} = \frac{\vec{s} \times \vec{t}}{|\vec{s} \times \vec{t}|}$$

$$d(g_1, g_2) = |\vec{\ell} \cdot (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)|$$

3. Vektorräume (lineare Räume) über $\mathbb{R}$

Def. 1 Ein Vektorraum (linearer Raum) über $\mathbb{R}$ ist eine Menge V zusammen mit Abbildungen $\_+\_ : V \times V \to V$ und $\_\cdot\_ : \mathbb{R} \times V \to V$, sodaß

(1) $u+v = v+u$ (Kommutativgesetz)

(2) $(u+v)+w = u+(v+w)$ (Assoziativgesetz)

(3) es existiert (genau) ein $0 \in V$, sodaß
$0+u = u = u+0$ (neutrales Element)

(4) zu jedem $u \in V$ existiert genau ein "negatives" Element $-u$ mit $u+(-u)=0$

(5) $\alpha \cdot (u+v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$ (1. Distrib. Gesetz)

(6) $(\alpha+\beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$ (2. — " —)

(7) $(\alpha\beta) \cdot u = \alpha \cdot (\beta \cdot u)$

(8) $1 \cdot u = u$

Elemente von V heißen Vektoren und reelle Zahlen heißen Skalare.

<u>Bem.</u> Ähnlich definiert man VR über $\mathbb{C}$.

<u>Bsp</u> $\mathbb{R}^n$ mit $\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$

und $\lambda \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u_1 \\ \vdots \\ \lambda \cdot u_n \end{pmatrix}$

<u>Def. 2</u> $U \subseteq V$ heißt UnterVR (linearer Unter- bzw. Teilraum), wenn $0 \in U$ und

$u_1, \ldots, u_n \in U$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n \in U$

$u, v \in U$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \cdot u + \beta \cdot v \in U$

<u>Def. 3</u> Seien $u_1, \ldots, u_n$ Vektoren eines VRs V. Dann heißt jeder Vektor der Gestalt

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n$$

eine <u>Linearkombination</u> von $u_1, \ldots, u_n$.

$u_1, \ldots, u_n$ heißen <u>linear unabhängig</u>, wenn keiner der Vektoren als Linearkombination der übrigen darstellbar ist.

Bem. $U \subseteq V$ ist linearer Unterraum von V, wenn U unter Linearkombinationen (auch $u = 0$) abgeschlossen ist.

Def. 4 Ein System $\{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ von Vektoren heißt Erzeugendensystem für V, wenn jedes $v \in V$ als $v = \alpha_1 \cdot u_1 + \ldots + \alpha_n \cdot u_n$ darstellbar ist. Ein Erzeugendensystem, das linear unabhängig ist, heißt eine Basis von V.

Gibt es eine aus endlich vielen Vektoren bestehende Basis für V, dann heißt deren Anzahl Dimension von V ($\dim V$). Gibt es für V keine endliche Basis, so heißt V unendlichdimensional ($\dim V = \infty$).

Bem Man kann zeigen, daß endliche Dimensionen eindeutig bestimmt sind.

Bsp $e_1, \ldots, e_n$ mit $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} \leftarrow$ i-te Zeile ist eine Basis für $\mathbb{R}^n$.

Für $u, v \in \mathbb{R}^n$ heißt

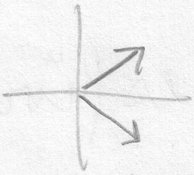
$$u \cdot v = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$ Skalarprodukt von u und v.

$$|u| = (u \cdot u)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{u_1^2 + \dots + u_n^2}$$

$\{u_1, \dots, u_n\}$ heißt Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$, wenn $\{u_1, \dots, u_n\}$ Basis von V ist und $u_i \cdot u_j = \delta_{ij}$ $(\Rightarrow |u_i| = 1)$.

Besp. $\{e_1, \dots, e_n\}$ ONB von $\mathbb{R}^n$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$ ONB von $\mathbb{R}^2$



<u>Def. 5</u> Seien V, W lineare Räume. Eine Abbildung $\varphi: V \to W$ heißt <u>linear</u>, wenn

$$\varphi(\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = \alpha \cdot \varphi(u) + \beta \cdot \varphi(v)$$

für alle $u, v \in V$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

<u>Bem</u> $\varphi(\vec{0}) = \varphi(0 \cdot \vec{0}) = 0 \cdot \varphi(\vec{0}) = \vec{0}$

$0 = \varphi(0) = \varphi(u + (-u)) = \varphi(u) + \varphi(-u) \Rightarrow \varphi(-u) = -\varphi(u)$

Satz 6 Sei $\varphi: V \to W$ linear.

Die Bildmenge $\text{Bild}\,\varphi = \{\varphi(v) \mid v \in V\}$ ist Unter VR von W.

Der Kern $\text{Kern}\,\varphi = \{v \in V \mid \varphi(v) = 0\}$ ist Unter VR von V.

Bem. φ ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\text{Kern}\,\varphi = \{0\}$

Satz 7 Eine lineare Abbildung $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist bereits durch $\vec{a}_\nu := \varphi(e_\nu)$ $\nu = 1, \dots, n$ festgelegt: für $v = (v_1, \dots, v_n)^T$ gilt

$$\varphi(v) = \sum_{\nu=1}^{n} v_\nu \cdot \vec{a}_\nu$$

Für beliebige $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^m$ gibt es genau eine lineare Abb. $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sodaß $\varphi(e_\nu) = \vec{a}_\nu$ für $\nu = 1, \dots, n$.

φ durch Matrix $(\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ dargestellt!
(siehe Abschnitt 4)

Dimensionssatz

Für eine lineare Abb. $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt

$$\dim(\text{Kern}\,\varphi) = n - \dim(\text{Bild}\,\varphi)$$

d.h. $\boxed{\dim(\text{Kern}\,\varphi) + \dim(\text{Bild}\,\varphi) = n}$

4. Matrizen

Def. 1 Eine $m \times n$ Matrix ist ein rechteckiges Zahlenschema

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & a_{ij} & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$$

i Zeilenindex $\quad j$ Spaltenindex

$a_{ij} \in \mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)

$\mathbb{R}^{m \times n}$ (bzw. $\mathbb{C}^{m \times n}$) bezeichnet die Menge der $m \times n$ Matrizen mit Einträgen aus $\mathbb{R}$ (bzw. $\mathbb{C}$)

Eine Matrix heißt quadratisch, wenn $m = n$. In diesem Fall heißt $(a_{11}, \dots, a_{nn})$ die (Haupt) Diagonale der Matrix.

Wir definieren nun einige Operationen auf Matrizen

$(\alpha \cdot A)_{ij} = \alpha \cdot A_{ij} \qquad (A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$

$$A \in \mathbb{R}^{m \times n} \longmapsto A^T \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

$$(A^T)_{ij} = A_{ij} \qquad A^T \text{ Transponierte von } A$$

<u>Produkt von Matrizen</u> $\quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, B^{n \cdot r}$

$$\longmapsto A \cdot B \in \mathbb{R}^{m \times r}$$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

<u>Rechengesetze für Matrizen</u>

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) \quad \text{(Assoziativgesetz)}$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

(Distributivgesetze)

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

<u>Bem</u> Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt i.a. nicht $AB = BA$

<u>Bsp</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Satz 2 Lineare Abbildungen von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$ stehen in folgender 1-1-Entsprechung:

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ induziert die Matrix A mit

$$A_{ji} = \varphi(e_i)_j$$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ induziert die lin. Abb. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

(a_{ij}) mit $\varphi(x)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j$

($\varphi(e_j)$ ist j-ter Spaltenvektor)

Bem $id_{\mathbb{R}^n} \leftrightsquigarrow (\delta_{ii}) =: I_n$ Einheits(diagonal)matrix

$A \leftrightsquigarrow \varphi$ und $B \leftrightsquigarrow \psi \Rightarrow A \cdot B \leftrightsquigarrow \varphi \circ \psi$

Def 3 Der Zeilen- (bzw. Spaltenrang) ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- (bzw. Spalten-)vektoren.

Bei Diagonalmatrizen läßt sich der Rang leicht ablesen: Anzahl der Diagonalelemente $\neq 0$

Def. 3 Unter einer elementaren Zeilen- (bzw. Spalten) Umformung versteht man eine Operation folgender Art:
addiere zur i-ten Zeile (bzw. Spalte) das λ-fache der j-ten Zeile (bzw. Spalte), wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ im Falle von $i = j$ von -1 verschieden gewählt werden muß.

Satz 4 Elementare Umformungen lassen Zeilen- und Spaltenrang unverändert.

Satz 5 Jede Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ läßt sich durch elementare Umformungen auf die Gestalt $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bringen, wobei r = Zeilenrang von A = Spaltenrang von A.

Bsp a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5. Determinanten

Def 1 Die Determinante von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist

$$\det A = |A| = \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \cdot a_{1\pi(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\pi(n)}$$

wobei sich die Summe über alle Permutationen $\pi : \{1, \ldots, n\} \xrightarrow[\text{bij.}]{} \{1, \ldots, n\}$ erstreckt und

$\operatorname{sign}(\pi) = 1$, wenn π aus einer geraden Anz. von paarweisen Vertauschungen hervorgeht

$\operatorname{sign}(\pi) = 1$ sonst, d.h. wenn π aus einer ungeraden Anz. von paarweisen Vertauschungen hervorgeht

$$(m_1, \ldots, m_i, \ldots, m_j, \ldots, m_n)$$
$$\downarrow$$
$$(m_1, \ldots, m_j, \ldots, m_i, \ldots, m_n)$$

paarweise Vertauschung von m_i und m_j

Man kann zeigen, daß

$$\operatorname{sign}(\pi) = (-1)^{|\{(i,j) \mid i<j,\ \pi(i) > \pi(j)\}|} = \prod_{i<j} \frac{\pi(i) - \pi(j)}{i - j}$$

Satz 2

a) $\det I = \det(e_1|\ldots|e_n) = 1$

b) det ist in jeder Spalte linear, d.h.

$$\det\left(a_1|\ldots|a_{j-1}\left|\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot b_i, a_{j+1}\right|\ldots|a_n\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot \det(a_1|\ldots|a_{j-1}|b_i|a_{j+1}|\ldots|b_n)$$

c) $\det(\ldots|a_i|\ldots|a_j|\ldots) =$

$$= -\det(\ldots|a_j|\ldots|a_i|\ldots)$$

d) $\det A^T = \det A$

e) $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$

Satz 3 a) ist ein Spaltenvektor von A 0, dann $\det A = 0$

b) sind 2 Spaltenvektoren von A gleich, dann $\det A = 0$

c) Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einem anderen Spaltenvektor erhält die Determinante

d) a), b), c) gelten auch, wenn man „Spalte" durch „Zeile" ersetzt

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $1 \leq i, j \leq n$ bezeichne $\tilde{A}_{ij}$ diejenige $(n-1) \times (n-1)$ Matrix, die man aus A erhält, indem man die i-te Zeile und j-te Spalte streicht.

Satz 4 (Entwicklungsatz für Determinanten)

a) $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det \tilde{A}_{ij}$$

(Entwicklung nach i-ter Zeile)

b) $$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot \det \tilde{A}_{ij}$$

(Entwicklung nach j-ter Spalte)

Beispielsweise berechnet sich die Determinante einer 3×3 Matrix $A = (a_{ij})$ wie folgt

$$a_{11} \det \begin{pmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - a_{21} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + a_{31} \det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Berechnung von $\det A$ erfordert $n!$ Summanden, mit jeweils n-fachen Produkt !!

<u>Satz 5</u> Für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sind folgende Aussagen äquivalent

a) $\det A \neq 0$ b) $\operatorname{rg} A = n$

c) $\operatorname{Kern} A = \{0\}$ und $\operatorname{Bild} A = \mathbb{R}^n$

d) A entspricht einer bijektiven linearen Abb. $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

<u>Bem</u> Wenn $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv ist, dann ist die Umkehrabbildung φ^{-1} auch linear.

<u>Def. 6</u> Eine Matrix A heißt <u>regulär</u>, <u>nicht-singulär</u> bzw. <u>invertierbar</u>, wenn $\det A \neq 0$.

Satz 7

<u>Inverse einer regulären Matrix A</u>

$$A_{adj} = \left((-1)^{i+j} \det \tilde{A}_{ij} \right)^T \quad \text{(aus Satz 3 u. 4)}$$

folgt, daß für $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_{adj}$ gilt $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$

6. Lineare Gleichungssysteme

$$(1)\quad \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \dots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + \dots + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

oder kompakt geschrieben als

$$(2)\quad Ax = b \qquad (A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m)$$

Lösungsmenge $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b\}$

leer: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

nicht eindeutig: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

<u>Def. 1</u> (2) heißt <u>homogen</u>, wenn $b = 0$

$Ax = 0$ heißt das <u>zu (2) gehörige homogene Gleichungssystem</u>

<u>Satz 2</u> Sei $A\hat{x} = b$, dann ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ gegeben durch

$$\hat{x} + \operatorname{Kern} A = \{\hat{x} + x \mid Ax = 0\}$$

$\dim(\operatorname{Kern} A) = n - r$, wobei r der Rang von A ist.

Satz 3 $Ax = b$ ist lösbar, wenn b eine Linearkombination der Spalten von A ist, d.h. $x_1 \cdot a_1 + \ldots + x_n \cdot a_n = b$.

Dies ist genau dann der Fall, wenn

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(A|b)$$

Für $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ist (2) genau dann eindeutig lösbar, wenn

$$\operatorname{rg} A = n = \operatorname{rg}(A|b)$$

Wenn A invertierbar ist, dann ist die eindeutige Lösung von (2) gegeben durch

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Satz 4 (Cramersche Regel)

Sei A eine invertierbare $n \times n$ Matrix und $A \cdot x = b$, dann gilt

$$x_k = \frac{\det(a_1, \ldots, a_{k-1}, b, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{\det A}$$

Beweis: $x = A^{-1} \cdot b \underset{S6.7}{=} \frac{1}{\det A} A_{adj}\, b$, also

$$x_k = \frac{1}{\det A} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot \det \tilde{A}_{ik} \cdot b_i \right)}$$

(nach Satz 6.4 b) $= \det(a_1 | - | a_{k-1} | b | a_{k+1} | - | a_n)$

Gaußsches Eliminationsverfahren

Durch geeignetes Vertauschen der Reihenfolge der Variablen und geeignete Zeilenumformungen kann man $Ax = b$ auf die Gestalt

$$(3) \quad \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & \Theta & \ddots & \vdots \\ & & & u_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cancel{x}_1 \\ \vdots \\ \cancel{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

bringen, ~~wobei $(y_1, -, y_n) = (x_{\pi(1)}, -, x_{\pi(n)})$ für eine Permutation π (die über die Spaltenvertauschungen Buch führt!)~~

$$\cancel{x}_n = v_n u_{nn}^{-1} \qquad x_k = u_{kk}^{-1} \left(v_k - \sum_{i=1}^{n-k} u_{ki}\, x_{k+i} \right)$$

$(k = n-1, \dots, 1)$

da alle Umformungen die Lösungsmenge (~~bis auf Permutation der Komponenten)~~ erhalten, gilt

$$Ax = b \iff Ux = \tilde{b} \qquad \cancel{(x_{\pi(i)} = y_i)}.$$

<u>Bsp</u>
$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & -40 & 26 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 0 & -40 & 26 \\ 0 & 0 & \frac{1}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -\frac{93}{40} \end{pmatrix}$$

$$2 - \frac{3 \cdot 26}{40} = 2 - \frac{3 \cdot 13}{20} = \frac{40 - 39}{20} = \frac{1}{20}$$

$$-3 + \frac{3 \cdot 9}{40} = \frac{-120 + 27}{40} = \frac{-93}{40}$$

det = Produkt der Diagonalelemente $= -2$

7. Eigenwerte und quadratische Formen

Def. 1 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Ein $\lambda \in \mathbb{C}$ heißt Eigenwert von A, wenn $\boxed{\lambda x = Ax}$ für ein $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$.

(x heißt ein zu λ gehöriger Eigenwert)

Offenbar ist λ Eigenwert von A, wenn die Gl. $(\lambda I - A)x = 0$ eine von 0 verschiedene Lösung besitzt, d.h. wenn $\underbrace{\det(\lambda I - A)}$ $= 0$.

charakteristisches Polynom $P_A(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \alpha_2 \lambda^{n-2} + \ldots + \alpha_n$

Satz 2 Die Eigenwerte von A sind die Nullstellen des charakt. Polynoms P_A.

Nach dem auf C. F. Gauß zurückgehenden Fundamentalsatz der Algebra (1799) gilt

$$P_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \ldots (\lambda - \lambda_n),$$

wobei $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ die Nullstellen (mit Vielfachheit) von P_A sind. $P_A(\lambda) = 0 \Leftrightarrow P_A(\bar{\lambda}) = 0$.

Bestimmung der Nullstellen von P_A ist schwierig für großes n. Es gilt

Satz 3 Für $A = (a_{ij})$ gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \quad (\text{Spur von } A)$$

$$\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \det A$$

mit EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

Satz 4 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ und $k \in \mathbb{N}$.
Dann sind die EW von A^k $\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k$.
Wenn A invertierbar ist, dann sind $\lambda_1^{-1}, \dots, \lambda_n^{-1}$ die EW von A^{-1}.

Satz 5 Wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dann müßen nicht alle Eigenwerte von A reell sein. Ist λ EW von A, dann auch $\bar{\lambda}$.

Bsp. Drehungen $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ haben genau dann reelle EW, wenn $\varphi \in \pi\mathbb{Z}$.

Bsp. $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$P_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} =$$

$$= \lambda^2 - \mathrm{Spur}(A)\lambda + \det A$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{Spur}\,A \pm \sqrt{\mathrm{Spur}(A)^2 - 4\det A}\right.$$

reelle EW existieren $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Spur}(A)^2 \geq 4 \det A$

Satz 6 Die zu einem EW λ von A gehörigen EV sind die nichttrivialen Lösungen von

$$(\lambda I - A)x = 0$$

Def. 7 Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißen ähnlich, wenn es eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gibt, sodaß

$$B = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

Satz 8 Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche char. Polynom und somit die gleichen EW.

Beweis: $\det(\lambda I - T^{-1}AT) =$

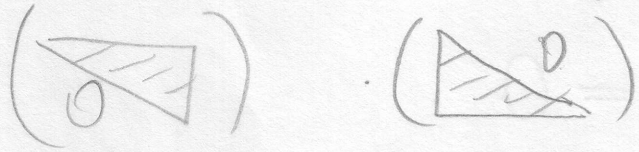
$$= \det(T^{-1}\lambda T - T^{-1}AT) =$$

$$= \det(T^{-1}(\lambda I - A)T) =$$

$$= \det(T^{-1}) \det(\lambda I - A) \det T =$$

$$= \det(\lambda I - A) \qquad \square$$

Def 9 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ heißt obere (untere) Dreiecksmatrix, wenn $a_{ij} = 0$ für $i > j$ $(i < j)$.



Satz 10 Die EW einer Dreiecksmatrix A sind genau die Elemente der Hauptdiagonalen A.

Beweis: $$\det(\lambda I - A) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - a_{ii}) \qquad \square$$

Mit elem. Umformungen läßt sich jede Matrix auf Dreiecksform bringen.

Satz 11 Wenn

$$T^{-1} \cdot A \cdot T = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dann sind die Diagonalelemente von D die EW von A. Der i-te Spaltenvektor von T ist Eigenvektor zu λ_i

Beweis: $T^{-1} A T e_i = \lambda_i e_i$, also

$$A(Te_i) = T(\lambda_i e_i) = \lambda_i (Te_i) \quad \square$$

Def 12 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt

symmetrisch $\Leftrightarrow A^T = A$

orthogonal $\Leftrightarrow A^T = A^{-1}$.

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ sei $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Dann heißt A

hermitesch $\Leftrightarrow A^* = A$

unitär $\Leftrightarrow A^* = A^{-1}$.

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ sind symmetrisch und hermitesch äquiv. und auch orth. u. unitär.

<u>Satz 13</u> Für symmetrische $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt es orthogonale $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, sodaß $S^{-1} A S^{-1}$ eine Diagonalmatrix D ist. Die Spalten von S bilden eine Orthonormalbasis für den $\mathbb{R}^n$.

<u>Def. 14</u> Für <u>symm.</u> $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist die zugehörige quadratische Form definiert als

$$Q_A(x) = x^T A x = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

A <u>positiv (negativ) definit</u>, wenn

$Q_A(x) > 0$ $\left(Q_A(x) < 0 \right)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Wenn Q_A Werte > 0 und < 0 annimmt, so heißt A <u>indefinit</u>.

Diese Eigenschaften werden benötigt für Extremwertsaufgaben in mehreren Variablen. (vgl. $f'(a) > 0$ und $f'(a) < 0$).

Man kann diese Eigenschaften an den EW von A ablesen.

Satz 15 (Hurwitz Kriterium)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symm. Dann sind äquivalent

1) A positiv definit

2) alle EW von A > 0

3) die führenden Hauptunterdeterminanten

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1i} \\ & & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ii} \end{pmatrix}$$ sind alle > 0.