# VI Taylor- und Fourierreihen

## 1. Folgen und Reihen von Funktionen

Def. 1 Sei M eine Menge von Funktionen von $D \subseteq \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

i) $f: \mathbb{N} \to M$ ist eine Folge in M

ii) ist $f = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in M, so heißt die Folge der Partialsummen

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$$

eine Funktionenreihe, für die man

$\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ schreibt.

Def. 2 i) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heißt auf D punktweise konvergent, wenn für alle $x \in D$ die Folge $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$. In diesem Fall heißt die Fkt. $f: D \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ die Grenzfunktion der Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

ii) die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ heißt auf $D$ punktweise konvergent, wenn für alle $x \in D$ die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ konvergiert. Die Funktion $g: D \to \mathbb{R}$ heißt Summe der Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$, wenn $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ für alle $x \in D$.

<u>Bsp</u> Sei $D = [0,1]$ und

$$f_n : D \to \mathbb{R} : x \to x^n$$

dann konvergiert $(f_n)$ gegen die Grenzfunktion

$$f: D \to \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

alle $f_n$ sind stetig, nicht aber $f$ !

Auf $D \setminus \{1\} = [0,1)$ konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gegen die Grenzfkt.

$$g: [0,1) \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

die Folge der Partialsummen divergiert gegen $\infty$ für $x = 1$

<u>Def 3</u> Die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ <u>konvergiert auf D gleichmäßig gegen $f: D \to \mathbb{R}$</u>

gdw $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \; \forall n \geq N_\varepsilon \; \forall x \in D$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergiert gleichmäßig gegen g, wenn die Folge der Partialsummen gegen g konvergiert, d.h. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \; \forall n \geq N_\varepsilon \; \forall x \in D \; \left| g(x) - \sum_{k=0}^{n} f_n(x) \right| < \varepsilon$

<u>Bem</u> $(f_n) \xrightarrow[\text{glm.}]{} f$ gdw $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$

<u>Bsp</u> $f_n : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^n$ konvergiert <u>nicht</u> gleichmäßig gegen $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$, denn für $\varepsilon = \frac{1}{2}$ gilt für $x = \frac{1}{\sqrt[n]{2}} \in [0,1)$, daß $|f(x) - f_n(x)| = x^n = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}$ und somit

$\forall N \, \exists n \geq N \, \exists x \in D \; |f(x) - f_n(x)| \geq \frac{1}{2}$

d.h. $\exists \varepsilon > 0 \, \forall N \, \exists n \geq N \, \exists x \in D \; |f(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon$

<u>Satz 4</u> Wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge auf $D$ ist und $|f_n(x)| \leq c_n$ für alle $x \in D$ mit $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$, dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig auf $D$.

<u>Bsp</u> $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ konvergiert glm auf $\mathbb{R}$, da $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \infty$.

Sei $a \in (0,1)$, dann konvergiert $f_n(x) = x^n$ auf $[-a, a]$ gleichmäßig, da $|f_n(x)| \leq a^n$ für alle $x \in [-a, a]$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{a}{1-a} < \infty$.

Gleichmäßige Konvergenz erhält im Unterschied zu punktweiser Konvergenz die Stetigkeit von Funktionen.

Satz 5 Wenn alle $f_n : D \to \mathbb{R}$ stetig sind und $(f_n)$ gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert, dann ist auch $f$ stetig.

Wenn alle $f_n$ stetig sind und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen $g$ konvergiert, dann ist auch $g$ stetig.

Bem alle Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n} f_n$ sind stetig

Satz 6 Sei $D = [a, b]$ und $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetiger Funktionen, die gleichmäßig gegen $f$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Wenn alle $f_n$ stetig sind und $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ gleichmäßig gegen $g$ konvergiert, dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

$$= \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,dx$$

<u>Bsp.</u> $D = [0,1]$ und $f_n(x) = 2nx\, e^{-nx^2}$

es gilt für $x \in D$, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{nx^2}{e^{nx^2}} = 0$ (da $\lim\limits_{n\to\infty} nx^2 = \infty$ für $x > 0$) also auch $\lim\limits_{n\to\infty} 2nx\, e^{-n^2 x} = 0$

andererseits gilt

$$\int_0^1 2nx\, e^{-nx^2}\, dx = -e^{-nx}\Big|_{x=0}^{x=1} = 1 - e^{-n}$$ und

somit $$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} 1 - e^{n} = 1 \neq \int_0^1 0\, dx$$

also konvergiert $(f_n)$ nicht gleichmässig gegen 0

<u>Bsp.</u> für $0 < a < 1$ konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ auf $D = [0,a]$ gleichmäßig gegen $\frac{1}{1-x}$; also gilt nach Satz 6, daß

$$-\ln(1-a) = \int_0^a \frac{1}{1-x}\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^a \sum_{k=0}^{n} x^k\, dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{a^n}{n}$$

also gilt für $0 < a < 1$, daß $\ln(1-a) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n}$

<u>Übung</u> Zeige, dies gilt auch für $|a| < 1$.

<u>Satz 7</u> Sei $f_n$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen auf einem Intervall I mit Grenzfunktion f (bzgl. punktweiser Konvergenz).

i) Ist die Folge $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ auf I gleichmäßig konvergent, so ist f differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

ii) In der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ seien die $f_n$ stetig differenzierbar auf einem Intervall I und sei g die Grenzfunktion.

Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'$ auf I gleichmäßig konvergiert, so ist die Summe g auf I differenzierbar und es gilt

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x).$$

<u>Bsp</u> $f_n(x) = \dfrac{\sin n^2 x}{n}$ konv. glm. (auf $[0, 2\pi]$) gegen 0; $f_n'(x) = nx \cos nx$ divergiert aber (für $x = \pi$)

## 2. Potenzreihen

**Def. 1** Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen und $x_0 \in \mathbb{R}$, so heißt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Potenzreihe um Entwicklungspunkt $x_0$. Die $a_n$ heißen Koeffizienten der Potenzreihe.

**Bsp.** (1) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (3) $\sum_{n=0}^{\infty} n! \cdot x^n$

**Satz 2** i) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergent für ein $r \in \mathbb{R}$ (mit $r \neq 0$), so ist die Reihe absolut konvergent für alle $x$ mit $|x| < |r|$.

ii) Ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ divergent für $s \in \mathbb{R}$, so divergiert sie für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > |s|$.

**Bsp** (1) konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$

(3) divergiert für alle $x \neq 0$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x^n \cdot n! = \infty\right)$

(2) konv. für $|x| > 1$, div. für $|x| < 1$, divergiert für $x = 1$, konvergiert für $x = -1$

$\varrho \geq 0$ heißt <u>Konvergenzradius</u> der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, wenn sie für $|x| < \varrho$ konvergiert und für $|x| > \varrho$ divergiert.

<u>Satz 3</u> (Quotientenkriterium) Sei $a_n \neq 0$ für $n \geq n_0$. Wenn $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = b \in [0, \infty]$, dann ist $b$ $(= \varrho)$ der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

<u>Satz 4</u> (Wurzelkriterium)

Sei $c = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sup_{m\geq n} \sqrt[m]{|a_m|}$.

Dann ist der Konvergenzradius $\varrho$ von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gegeben durch

$$\varrho = \infty \quad \text{wenn } c = 0$$

$$\varrho = \frac{1}{c} \quad \text{wenn } 0 < c < \infty$$

$$\varrho = 0 \quad \text{wenn } c = \infty$$

<u>Bsp</u> 1) für $\sum \frac{x^n}{n}$ ist $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$

2) für $\sum_{n=0}^{\infty} (2^n+1) x^n$ ist $\varrho = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = \frac{1}{2}$

3) für $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ ist $\varrho = \frac{1}{2}$

Satz 5 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien $\varrho_a$ bzw. $\varrho_b$. Dann gilt für $|x| < \min(\varrho_a, \varrho_b)$

i) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$

ii) $$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

wobei $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$ („Cauchy Produkt")

Satz 6 Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\varrho > 0$ und sei $f : (-\varrho, \varrho) \to \mathbb{R} : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

i) Dann ist $f$ auf $(-\varrho, \varrho)$ differenzierbar mit

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad (x \in (-\varrho, \varrho))$$

und $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ hat wieder Konvergenzradius $\varrho$

ii) $f$ ist auf jedem Intervall $[a, b] \subseteq (-\varrho, \varrho)$ integrierbar und für $x \in (-\varrho, \varrho)$ gilt

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

und letztere Reihe hat wieder Konvergenzradius $\varrho$.

Bsp. Für $|x|<1$ gilt $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$.

Wegen Satz 6 i) gilt

$$\frac{1}{(1-x)^2} = f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, x^n$$

für $|x|<1$. Wegen Satz 5 i) gilt nun

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^n = f'(x) - f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{1}{1-x} =$$

$$= \frac{1-(1-x)}{(1-x)^2} = \frac{x}{x^2-2x+1}$$

## 3. Taylorreihen

**Satz 1** Sei $f$ auf dem Intervall $I$ $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann gilt für $x, x_0 \in I$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_n(x, x_0)$$

wobei $R_n(x,x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$

**Bem.** Manchmal ist folgende auf Lagrange zurückgehende Darstellung des Restglieds nützlich

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

für ein $0 < \theta < 1$.

**Bsp.** a) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$, $f''''(x) = \sin x$

also gilt $f^{(2n)}(0) = 0$ und

$$f^{(2n+1)}(0) = (-1)^n$$

also gilt nach Satz 1, daß

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x,0)$$

Nach der Lagrangeschen Restgliedabschätzung gilt

$$R_{2n+1}(x,0) \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Also gilt $\lim_{n\to\infty} R_n(x,0) = 0$.

Bem. Cauchysche Restgliedabschätzung

$$R_n(x,x_0) = \frac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{n!}(1-\theta)^n (x-x_0)^{n+1}$$

für ein $0<\theta<1$

Bsp. β) sei $f(x) = \ln(1+x)$ für $x>-1$

man zeigt leicht, daß $f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$

für $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ gilt also

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + R_n(x,0)$$

nach der Lagrangeschen Restgliedabschätzung gilt

(1) $$R_n(x,0) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}\left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

und nach der Cauchyschen Restgliedabschätz. gilt

(2)



$$R_n(x,0) \leq \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$$

$$= (-1)^n (1-\theta)^n \left(\frac{x}{1+\theta x}\right)^{n+1}$$

für $0 \leq x < 1$ folgt aus (1), daß $|R_n(x,0)| \leq \frac{1}{n+1}$

für $-1 < x < 0$ folgt aus (2), daß

$$|R_n(x,0)| = \frac{|x|^{n+1}}{|1+\theta x|}\left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \leq \frac{|x|^{n+1}}{1-|x|}$$

somit gilt für alle $x \in (-1,1)$, daß

$$\lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

Satz 2 Wenn $f$ auf einem Intervall $I$ beliebig oft differenzierbar ist, dann gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

genau dann, wenn $\lim_{n\to\infty} R_n(x,x_0) = 0$.

Also folgt aus den Betrachtungen in den Beispielen a) und b), daß

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2k+1} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \qquad (x \in (-1,1))$$

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x)$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $s\ (>0)$. Dann gilt wegen Satz 6 i) aus $\underline{\text{VII}}$ 2, daß $a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$.

Somit folgt, die Eindeutigkeit von Potenzreihendarstellungen.

# 4. Fourierreihen

Eine Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt periodisch mit Periode $2\pi$, wenn

$$f(x) = f(x+2\pi) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Typische Beispiele sind die konstanten Fkt. und $\cos nx$ und $\sin nx$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Wir werden sehen, daß sich viele $2\pi$-period. Fkt. darstellen lassen als

$$f(x) \quad \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

(Fourierreihe von $f$).

Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos mt \cos nt \, dt = 0 \qquad \text{wenn } n \neq m$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mt \sin nt \, dt = 0 \qquad \text{—— n ——}$$

und $\int \cos mt \sin nt \, dt = 0$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nt \, dt = \begin{cases} \pi & n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ 2\pi & n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nt \, dt = \begin{cases} \pi & n \in \mathbb{N}\setminus\{0\} \\ 0 & n = 0 \end{cases}$$

<u>Def 1</u> Sei $f$ auf $[0, 2\pi]$ integrierbar.

Die Zahlen

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \qquad n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$$

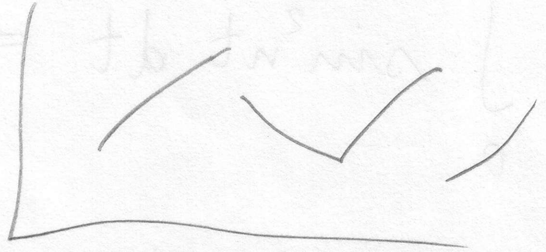
heißen <u>Fourierkoeffizienten</u> von $f$ und

$$FR(f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

heißt <u>Fourierreihe</u> von $f$.

Im allgemeinen brauchen Fourierreihen nicht punktweise zu konvergieren und $FR(f)(x)$ kann gegen von $f(x)$ verschiedene Zahl konv.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt stückweise stetig diffbar, wenn eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ exist., sodaß die Einschränkungen von $f$ auf $(a_i, a_{i+1})$ alle stetig diffbar sind



Eine s.s.d. Fkt. hat endlich viele Sprungstellen.

<u>Satz 2</u> Die $2\pi$-periodische Funktion $f$ sei s.s.d. Dann konvergiert die Fourierreihe von $f$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und es gilt

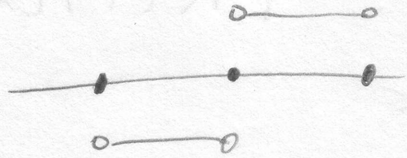
$$\frac{f(x_+) + f(x_-)}{2} = \underbrace{\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx}_{FR(f)(x)}$$

wobei $f(x_+) = \lim\limits_{\substack{u \to x \\ u > x}} f(u)$ und $f(x_-) = \lim\limits_{\substack{u \to x \\ u < x}} f(u)$

Wenn $f$ in $x$ stetig ist, gilt $f(x) = FR(f)(x)$.

**Bsp** Sei $h>0$ und $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x\in\{0,\pi\} \\ h & \text{für } 0<x<\pi \\ -h & \text{für } \pi<x<2\pi \end{cases}$$

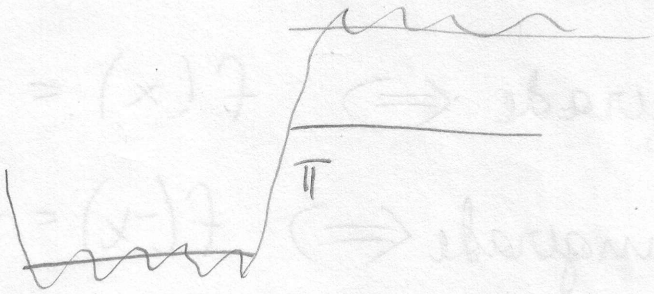


$a_n = 0$ für $n\in\mathbb{N}$ (da $f(-x) = -f(x)$)

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\, d = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h\sin nx\, dx =$$

$$= \frac{2h}{\pi n}\left(-\cos n\cdot\pi + \cos n\cdot 0\right) = \begin{cases} \frac{4h}{\pi n} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

siehe Bild auf S. 302 von Bd. 1 für Güte der Approximation.




Gibbs'sches Phänomen An den Sprungstellen schießen die Approximationen auch in kleinen Umgebungen über halbe Sprunghöhe hinaus.

Fourierentwicklung für period. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$FR(f)(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \lim_{N \to \infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$$

wobei $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx$

oft ist dieser Umweg übers Komplexe einfacher zum Rechnen.

FRI.

Rechenvereinfachung für gerade bzw. ungerade

---

$f$ gerade $\iff$ $f(x) = f(-x)$ $\implies$ $b_n = 0$

$f$ ungerade $\iff$ $f(-x) = -f(x)$ $\implies$ $a_n = 0$

für gerade $f$ muß man bloß die $a_n$ berechnen

für ungerade $f$ bloß die $b_n$

Bsp. $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & \text{für } \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$ gerade

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cdot \cos 0x \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi}\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi}{2}$$

für $n \ge 1$ ist

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx \, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \cos nx \, dx = \quad \text{(part. Integr.)}$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[ \frac{x \sin nx}{n}\Big|_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi} \frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{x=0}^{x=\pi} = \begin{cases} -\dfrac{2}{n^2\pi} & n \text{ ungerade} \\ 0 & n \text{ gerade} \end{cases}$$

$$FR(f)(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\left( \cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

Konvergiert gleichmäßig auf $2\pi$ (bzw. $\mathbb{R}$) gegen $f$

(da $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konv. und somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$)