TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

8. Übung

36. Relativ dichte Folgen: Eine unendliche Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ heißt *relativ dicht*, falls die Größen der Lücken zwischen zwei benachbarten Elementen in M beschränkt sind, d.h., mit $M = \{n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots\}$ gilt

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}(n_k - n_{k-1}) < \infty.$$

Man sagt auch, dass die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ relativ dicht ist.

a) Gib (auch nichttriviale) Beispiele und Gegenbeispiele relativ dichter Mengen an.
b) Relativ dichte Mengen können disjunkt sein. Gib ein Beispiel hierfür!
c) Sei E Banachraum, $T \in \mathscr{L}(E)$, so dass $T^{n_k} \to 0$ schwach (oder stark) mit (n_k) relativ dicht. Beweise, dass $T^n \to 0$ schwach (bzw. stark).

37. Gleichmässige Dichte: Für eine Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ definiere

$$\underline{d}(M) := \liminf_{n\to\infty} \frac{\#M \cap \{1,\dots,n\}}{n} \quad \text{und} \quad \overline{d}(M) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\#M \cap \{1,\dots,n\}}{n},$$

die *untere* bzw. die *obere Dichte* von M. Die *Dichte* $d(M)$ ist definiert durch $d(M) := \underline{d}(M) = \overline{d}(M)$, falls die Gleichheit gilt.

a) Wie kann man diese Dichten durch Cesàro-Mitteln ausdrücken? Wie hängen $\underline{d}$ und $\overline{d}$ zusammen?
b) Zeige: $0 \le \underline{d}(M) \le \overline{d}(M) \le 1$, und für jedes $\alpha \in [0,1]$ exsitiert $M \subseteq \mathbb{N}$ mit $d(M) = \alpha$.
c) Beweise, dass für jedes $\alpha, \beta \in [0,1]$, $\alpha \le \beta$ ein $M \subseteq \mathbb{N}$ existiert mit $\underline{d}(M) = \alpha$, und $\overline{d}(M) = \beta$.
d) Sei M relativ dicht, so ist $\underline{d}(M) > 0$. Die Umgekehrte Implikation ist aber nicht wahr.
e) Sei $\mathbb{N} = M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_k$. So gibt es ein $1 \le j \le k$ mit $\overline{d}(M_j) > 0$. Diese Aussage ist mit $\underline{d}$ statt $\overline{d}$ nicht wahr.
f) Ist $d(M) = d(N) = 1$, so gilt $d(M \cap N) = 1$.

38. Seien $A_k \subseteq \mathbb{N}$ mit $d(A_k) = 1$. Zeige die Existenz eines $A \subseteq \mathbb{N}$ mit $d(A) = 1$ und, so dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Menge $A \cap A_k$ endlich ist. *Hinweis: Wähle $k_i \in \mathbb{N}$ monoton aufsteigend, so dass es gilt:*

$$1 - \frac{1}{i+1} \le \frac{\#A_1 \cap \cdots \cap A_i \cap \{1,\dots,k\}}{k} \quad \textit{für } k \ge k_i.$$

Setze $A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \cup \{1,\dots,k_i\}$.

39. Cesàro-Konvergenz: Sei $(a_n) \subseteq \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) Es gibt $M = \{n_1 < \cdots < n_k < \cdots\} \subseteq \mathbb{N}$ mit $d(M) = 1$, so dass $a_{n_k} \to 0$ für $k \to \infty$.
b) $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i| \to 0$ für $n \to \infty$.

Hinweis: a) $\Rightarrow$ b) ist die einfachere Implikation: schätze $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i|$ nach oben ab. Zu b) $\Rightarrow$ a): Setze $A_k := \{n \in \mathbb{N} : |a_n| \le 1/k\}$ und zeige $d(\mathbb{N}\setminus A_k) = 0$ und damit $d(A_k) = 1$. Verwende Aufgabe 38.

40. Banachlimiten: Eine lineare Abbildung $\Phi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banach-Limes*, falls

i) für jedes $(x_n) \in \ell^\infty$ gilt $\Phi(x_n) = \Phi(L(x_n))$, wobei $L : \ell^\infty \to \ell^\infty$ der Links-Shift ist, d.h. $L(x_n) = (x_2, x_3, \dots)$,
ii) $\Phi(\mathbf{1}) = 1$ für $\mathbf{1} = (1,1,1,\dots,)$,
iii) für jedes $(x_n) \in \ell^\infty$, $x_n \ge 0$ gilt $\Phi(x_n) \ge 0$.

a) Betrachte $\delta_1 \in (\ell^\infty)'$, $\delta_1(x_n) = x_1$. Zeige: Es gibt einen schwachen Häufungspunkt Φ von $(L_n'\delta_1)$ und Φ ist ein Banach-Limes. *Hinweis: siehe Aufgabe 24.*
b) Sei $M \subseteq \mathbb{N}$ beliebige Menge, und $(x_n) \in \ell^\infty$ ihre characteristische (0–1) Folge ($x_n = 1 \Leftrightarrow n \in M$). Sei ferner $\alpha \in [\underline{d}(M), \overline{d}(M)]$ beliebig. Zeige die Existenz eines Banachlimites Φ mit $\Phi((x_n)) = \alpha$.