7. Übung

32. Duale Gruppen: Das Ziel dieser Aufgabe ist es konkrete duale Gruppen zu untersuchen.

a) Bestimme diejenige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \Gamma$ die stetig sind und für jedes $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllen $f(x+y) = f(x)f(y)$. *Hinweis: Sei $a := f(1)$, was ist $f(p/q)$ für $p, q \in \mathbb{Z}$?*

b) Zeige $\widehat{\mathbb{R}} \sim \mathbb{R}$.

c) Zeige $\widehat{\Gamma} \sim \mathbb{Z}$.

33. Sei G eine kompakte, kommutative topologische Gruppe und $X \subseteq \widehat{G}$ eine Teilmenge, die die punkte von G trennt. Beweise, dass $\widehat{G} = \langle X \rangle$, die Gruppe erzeugt von X. Zum Beweis:

a) Zeige, dass lin (X) dicht in $C(G)$ liegt.

b) Ist der Charakter $\chi \notin \langle X \rangle$, approximiere ihn aus $\mathrm{lin}(X)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ (L^2 bzgl. Haarschen Maß). Folgere damit einen Widerspruch.

34. Die Bohr-Kompaktifizierung: Sie G eine lokalkompakte kommutative Gruppe. Wir konstruieren eine kompakte (kommutative) Gruppe in die G dicht eingebettet ist.

a) Betrachte $\Gamma^{\widehat{G}}$. Versehen mit der Produkttopologie ist $\Gamma^{\widehat{G}}$ kompakt. Zeige, dass es mit der punktweiser Multiplikation eine kompakte Gruppe ist.

b) Betrachte die Abbildung $\Psi : G \to \Gamma^{\widehat{G}}$, $\Phi(g) = (\chi(g))_{\chi \in \widehat{G}}$. (Was ist die Beziehung zu dem Ψ aus dem Pontrjagin-Dualitätssatz?) Zeige, dass Ψ ein stetiger und injektiver Gruppenhomomorphismus ist. Die Bohr-Kompaktifizierung bG ist der Abschluss von $\Psi(G)$ in $\Gamma^{\widehat{G}}$. Zeige, dass bG eine kompakte Gruppe ist.

c) Wir untersuchen $\widehat{bG}$. Zeige zunächst, dass die Projektionen $\pi_\chi : \Gamma^{\widehat{G}} \to \Gamma$, $\pi_\chi((\gamma_\chi)_{\chi \in \widehat{G}}) = \gamma_\chi$ stetige Charaktere von $\Gamma^{\widehat{G}}$ und auch von bG sind. Bestimme, mit Hilfe von Aufgabe 33, die duale Gruppe $\widehat{bG}$.

d) Sei $\hat{G}_d$ die duale Gruppe von G aber versehen mit der diskreten Topologie (überlege: welche Funktionen sind auf $\hat{G}_d$ stetig?). Zeige, dass die Abbildung $\hat{G}_d \to \widehat{bG}$, $\chi \mapsto \pi_\chi$ wohldefiniert ist. Zeige, dass $\hat{G}_d$ und $\widehat{bG}$ isomorph sind.

e) Zeige $bG \sim \widehat{\hat{G}_d}$

35. Der Satz von Kronecker: Wir untersuchen die Minimalität der Rotation auf dem n-Torus. Seien $a_1, \ldots, a_n \in \Gamma$ und setze $\varphi : \Gamma^n \to \Gamma^n$ mit $\varphi(x_1, \ldots x_n) := (a_1 \cdot x_1, \ldots, a_n \cdot x_n)$. Zeige, dass somit ein TDS definiert wurde, das genau dann minimal ist, wenn $a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_n^{m_n} = 1$ mit $m_i \in \mathbb{Z}$ die Gleichheit $m_1 = m_2 = \cdots = m_n = 0$ impliziert. *Hinweis: Die Notwendigkeit der Bedingung wurde im Wesentlichen in der Aufgabe 7 gezeigt. Für die andere Implikation:*

a) Zeige, dass ein $\chi \in \widehat{\Gamma_d}$ existiert mit $\chi(a_i) = b_i$, wobei b_i beliebig vorgegeben sind, $i = 1, \ldots, n$ (Γ_d ist algebraisch Γ aber mit diskreter Topologie versehen).

b) Zeige, $b\mathbb{Z} \sim \widehat{\Gamma_d}$ und betrachte $\Psi : \mathbb{Z} \to b\mathbb{Z}$ aus Aufgabe 34. Was ist $\Psi(n) \in \widehat{\Gamma_d}$? Approximiere χ aus Teil a) durch Elementen aus $\Psi(\mathbb{Z})$.