TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

5. Übung

20. Zeige, dass ein mittel-ergodischer Operator $T \in \mathscr{L}(E)$ Spektralradius $r(T) \leq 1$ hat.

21. Zeige, dass eine mittel-ergodische Matrix $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ Potenzbeschränkt ist. *Hinweis: z.B. betrachte die Jordan-Normalform von M und beachte $\frac{T^n}{n} \to 0$!*

22. **Abel-Konvergenz:** Sei E Banachraum und $(a_k) \subseteq E$ eine Folge mit $\limsup_k \|a_k\|^{1/k} \leq 1$. Für $0 \leq x < 1$ setze

$$A(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot a_k.$$

Zeige, dass die Reihe hier konvergent ist. Wir nennen (a_k) Abel-konvergent, falls für $z \nearrow 1$ $(1-z)A(z)$ gegen ein $A_\infty \in E$ konvergiert. Die Folge (a_k) heißt Cesàro-konvergent, falls $C_n := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k$ gegen ein $C_\infty \in E$ konvergiert.

a) Sei (a_k) eine Cesàro-konvergente Folge. Beweise, dass sie mit $A_\infty = C_\infty$ auch Abel-konvergent ist. Dazu betrachte die folgenden Schritte:
   i) Zeige, dass für $0 \leq z < 1$ gilt
   $$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot a_k = (1-z)\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)z^k \cdot C_k.$$
   ii) Zeige die Identität:
   $$(1-z)A(z) - C_\infty = (1-z)^2\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot (k+1)C_k - (1-z)^2\sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot (k+1)C_\infty,$$
   und schätze sie für $z \to 1$ in der Norm ab.

b) Sei $T \in \mathscr{L}(E)$ mittel-ergodisch mit Projektion P. Zeige, dass für $r > 1$ ist $r \cdot \mathrm{Id} - T$ stetig invertierbar und
$$(r-1)(r\cdot \mathrm{Id} - T)^{-1}x \to Px \quad \text{für jedes } x \in E, \text{ falls } r \searrow 1.$$
Hinweis: benutze die Neumann-Reihe-Darstellung von $(r \cdot \mathrm{Id} - T)^{-1}$!

23. **Kontinuierliche Zeit:** Sei E Banachraum, und $T : \mathbb{R}_+ \to \mathscr{L}(E)$ eine C_0-Halbgruppe:

a) $T(0) = \mathrm{Id}$, $T(t+s) = T(t)T(s)$ für $s,t \geq 0$

b) Für jedes $x \in E$ ist $t \mapsto T(t)x \in E$ stetig.

In diesem Fall kann das Integral

$$\int_0^t T(s)x \,\mathrm{d}s$$

als Riemman-Integral definiert werden (mache dir diese Definition klar!). Ist $T(1)$ mittel-ergodisch mit Projektion P, so gilt

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x = P\int_0^1 T(s)x \,\mathrm{d}s \quad \text{für jedes } x \in E.$$

Hinweis: Beweise: $\int_n^{n+1} T(s)x\,\mathrm{d}s = T(n)\int_0^1 T(s)x\,\mathrm{d}s$!

24. **Banachlimiten:** Eine lineare Abbildung $\Phi : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ heißt *Banach-Limes*, falls

i) für jedes $(x_n) \in \ell^\infty$ gilt $\Phi(x_n) = \Phi(L(x_n))$, wobei $L : \ell^\infty \to \ell^\infty$ der Links-Shift ist, d.h. $L(x_n) = (x_2, x_3, \dots)$,

ii) $\Phi(\mathbf{1}) = 1$ für $\mathbf{1} = (1,1,1,\dots,)$,

iii) für jedes $(x_n) \in \ell^\infty$, $x_n \geq 0$ gilt $\Phi(x_n) \geq 0$.

a) Betrachte $\delta_1 \in (\ell^\infty)'$, $\delta_1(x_n) = x_1$. Zeige: Es gibt einen schwachen Häufungspunkt Φ von $(L'_n\delta_0)$ und Φ ist ein Banach-Limes. *Hinweis: siehe den Beweis von der Charakterisierung der Mittel-Ergodizität.*

b) Sei $(X;\varphi)$ ein TDS, $Tf := T_\varphi f = f \circ \varphi$ und $\nu \in C(X)'$. Definiere $\mu(f) := \Phi((\langle f, T'^n\nu\rangle)_n)$. Zeige, dass somit ein stetiges Linearfunktional auf $C(X)$ definiert wird, das auch φ-invariant ist. Gilt $\nu \geq 0$ bzw. $\nu(\mathbf{1}) = 1$, so besitzt μ auch diese Eigenschaften.