Ergodentheorie SS08
Bálint Farkas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

4. Übung

16. Wir untersuchen die Mittel-Ergodizität der Shift auf ℓ^p. Gegebenfalls ist die mittel-ergodische Projektion auch anzugeben!

a) Zeige, dass für $1 < p < \infty$ der Rechts-Shift $R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$ und der Links-Shift $L(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$ auf ℓ^p mittel-ergodisch sind.
b) Ist der Links-Shift L auf c bzw. c_0 mittel-ergodisch?
c) Ist der Rechts-Shift R auf c bzw. c_0 mittel-ergodisch?
d) Zeige, dass auf ℓ^1 der Links-Shift mittel-ergodisch und der Rechts-Shift nicht mittel-ergodisch ist.
e) Ist der Rechts- oder der Links-Shift auf ℓ^∞ mittel-ergodisch?

17. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ein linearer Operator T auf dem Banachraum $E = \mathbb{C}$ ist genau dann mittel-ergodisch, wenn $\|T\| \leq 1$.
b) Sei E ein Banachraum. Ist $T \in \mathscr{L}(E)$ periodisch (d.h. $T^{n_0} = \mathrm{Id}$ für ein n_0) so ist T mittel-ergodisch mit Projektion: $P = \frac{1}{n_0} \sum_{i=0}^{n_0 - 1} T^i$.
c) Sei E ein Banachraum und $T \in \mathscr{L}(E)$ mit Spektralradius $r(T) < 1$. So ist T Mittelergodisch und die Projektion ist 0.
d) Der Operator $Tf(x) = x \cdot (x)$ auf $C([0,1])$ ist nicht mittel-ergodisch.
e) Der Operator $Tf(x) = f(x^2)$ auf $C([0,1])$ ist nicht mittel-ergodisch.
f) Auch wenn $T \in \mathscr{L}(E)$ mittel-ergodisch ist, so muss aber $T' \in \mathscr{L}(E')$ nicht unbedingt mittel-ergodisch sein.
g) Ist $T' \in \mathscr{L}(E')$ mittel-ergodisch, so ist sein prädjungierter $T \in \mathscr{L}(E)$ auch mittel-ergodisch.

18. Betrachte den Banachraum $E = \ell^2(\mathbb{Z})$ und die Operatoren

$$L_4 : (x_n) \to (y_n) \quad \text{wobei} \quad y_n := \begin{cases} x_{n+1} & n \geq 0 \text{ oder } n < -1 \\ 4 \cdot x_0 & n = -1, \end{cases}$$

und

$$R_4 : (x_n) \to (z_n) \quad \text{wobei} \quad z_n := \begin{cases} x_{n-1} & n \geq 1 \text{ oder } n < 0 \\ 4 \cdot x_{-1} & n = 0. \end{cases}$$

a) Beweise, dass L_4 und R_4 potenz-beschränkt sind.
b) Ist $T := \frac{1}{2}(L_4 + R_4)$ auch Potenzbeschränkt?
c) Bestimme $\mathrm{Fix}\, L_4$ und $\mathrm{Fix}\, R_4$ und $\mathrm{Fix}\, T$!
d) Bestimme die Adjungierten Operatoren und deren Fixräume.
e) Ist T mittel-ergodisch?

19. Sei G eine kompakte Gruppe und $E = C(G)$ (gegebenfalls darf man $G = \Gamma$ betrachten). Für $g \in G$ definiere $\varphi_g(h) = g \cdot h$, die (Links)-Rotation mit g.

a) Zeige, dass für jedes $f \in E$ ist die Abbildung $h \mapsto T_{\varphi_h} f$ stetig.
b) Zeige, dass $\mathrm{Fix}\, T_{\varphi_g}$ genau dann 1-dimensional ist, wenn $\{g^n : n \in \mathbb{Z}\}$ ist dicht in G.