Ergodentheorie SS08
Bálint Farkas

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

3. Übung

11. Betrachte $H = L^2([0,1])$, $g \in L^\infty([0,1])$ mit $|g| = 1$ und definiere $Tf := g \cdot f$. Zeige, dass T unitär ist. Beweise, dass für jedes $f \in L^2([0,1])$ konvergiert die Folge

$$f_n := \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i f \quad \text{gegen } Pf,$$

wobei P eine Orthogonalprojektion ist. (Was kann man über allgemeineren normalen Kontraktionen aussagen?)

12. Schwache Topologie.

a) Beweise die Aussagen über $\cap, \cup$ offener bzw. abgeschlossener Mengen.
b) Zeige, dass stetiges Bild kompakter Mengen kompakt ist.
c) Zeige, dass eine Funktion φ auf $(E, \sigma(E,F))$ genau dann stetig ist, wenn Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen sind.
d) Sei E ein Vektorraum, $F = \emptyset$. Bestimme die offenen Mengen bzgl. $\sigma(E,F)$ und die Menge aller stetigen Abbildungen $\varphi : E \to \mathbb{R}$ bzw. $\Phi : E \to E$. Beschreibe die $\sigma(E,F)$-kompakten Mengen.
e) Sei $E = \mathbb{R}^d$ und $F = (\mathbb{R}^d)' \sim \mathbb{R}^d$. Bestimme die offenen Mengen bzgl. $\sigma(E,F)$.
f) Betrachte $(E, \sigma(E,E'))$ mit $\dim E = \infty$. Zeige, dass jede nicht-leere offene Menge kompletten Geraden enthält.
g) Zeige dass, ein linearer Operator auf $(E, \sigma(E,F))$ genau dann stetig ist, wenn in 0 stetig ist. (Wie definiert man die Stetigkeit an einer Stelle?)
h) Zeige, dass jedes $f \in F$ bzgl. $\sigma(E,F)$ stetig ist.
i) Zeige, dass $T : X \to (E, \sigma(E,F))$ (X ist ein topologischer Raum) genau dann stetig ist, falls für jedes $f \in F$ die Funktion $f \circ T$ stetig ist.

13. Lineare Operatoren.
Sei E Banachraum und $T \in \mathscr{L}(E)$.

a) Zeige, dass $T \in \mathscr{L}(E)$ auch $\sigma(E,E')$-stetig ist.
b) Zeige, dass für $T \in \mathscr{L}(E)$ der Operator $T' : E' \to E'$ $\sigma(E',E)$-stetig ist.
c) Sei E reflexiv und nehme an, dass $\|T^n\| \le M$ gilt für $n \in \mathbb{N}$. Zeige, dass $\overline{\{T^n x : n \in \mathbb{N}\}}$ $\sigma(E,E')$ kompakt ist.
d†) Gib ein Beispiel für $T \in \mathscr{L}(E')$ an, welches nicht $\sigma(E',E)$-stetig ist.

14. Sei E Banachraum, $T \in \mathscr{L}(E)$ eine Isometrie. Zeige, die folgenden Aussagen:

a) $\sigma(T) \subseteq \{z : |z| \le 1\}$.
b) Das approximative Punktspektrum erfüllt $A\sigma(T) \subseteq \Gamma$.
c) Ist T invertierbar, so gilt $\sigma(T) \subseteq \Gamma$. *Hinweis: es gilt:* $\lambda \mathrm{Id} - T = T(\lambda T^{-1} - \mathrm{Id})$.

15. Betrachte $E = \ell^\infty(\mathbb{Z})$ und $L : E \to E$ den Links-Shift.

a) Zeige, dass mit $X = \overline{B_E(0,1)}$ und $\varphi := L|_X$ ein TDS definiert wurde. Ist es minimal?