Ergodentheorie SS08
Bálint Farkas

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

2. Übung

5. Beschreibe diejenige Permutationen $\pi : \{0, 1, \ldots, k-1\} \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$, welche ein ergodisches bzw. minimales dynamisches System auf $\mathbb{R}^k$ definieren. Wie sehen die entsprechende Permutationsmatrizen aus?

6. Kronecker's Theorem II. Wir untersuchen die Rotation auf dem Torus. Seien $a, b \in \Gamma$ und setze $\varphi : \Gamma \times \Gamma \to \Gamma \times \Gamma$ mit $\varphi(x, y) = (a \cdot x, b \cdot y)$. Zeige, dass somit ein TDS definiert wurde.

a) Zeige, dass alle Punkte in $\Gamma \times \Gamma$ rekurrent sind.
b) Seien $m \in \mathbb{Z}$. Zeige, dass die Menge $A := \{(x, y) : x^m = y\}$ abgeschlossen ist.
c) Zeige, dass für $a^m = b$ mit einem $m \in \mathbb{Z}$ das TDS $(\Gamma \times \Gamma, \varphi)$ nicht minimal ist.
d) Nehme an $a^m = b^n$ für ein $n, m \in \mathbb{Z}$, $(n, m) \neq (0, 0)$. Zeige, dass $(\Gamma \times \Gamma, \varphi)$ nicht minimal ist.

Ein Satz von Kronecker besagt, dass unter d) genau die minimale Rotationen charakterisert wurden, d.h., $(\Gamma \times \Gamma, \varphi)$ ist minimal genau dann, wenn keien $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $(n, m) \neq (0, 0)$ existieren so dass $a^m = b^n$ (wir beweisen diese Aussage später).

7.

a) Sei X kompakter metrischer Raum, und $(X; \varphi)$ ein TDS. Zeige, dass $x_0 \in X$ rekurrent ist, genau dann wenn eine Folge $(n_k) \subseteq \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit $\varphi^{n_k}(x_0) \to x_0$ existiert.
b) Sei $X = [0, 1]$ und $\varphi(x) = x^2$. Zeige, dass $(X; \varphi)$ ein TDS ist, und bestimme die rekurrenten Punkte und die dimension von $\operatorname{Fix} T_\varphi$. Ist $(X; \varphi)$ minimal bzw. topologisch ergodisch?
c) Seien $(X; \varphi)$, $(Y; \psi)$ TDSe. Setze $\Phi(x, y) = (\varphi(x), \psi(y))$. Beweise, dass $(X; \varphi)$, $(Y; \psi)$ beide minimal sind, falls $(X \times Y; \Phi)$ minimal ist. Ist die Umkehrung auch wahr (vgl. Aufgabe 9)? Ist im speziellen Fall $Y = G$ mit $\psi = \varphi_a$, das TDS $(Z; \Phi)$ eine Gruppenerweiterung von X?
d) Betrachte $X = \Gamma \times \Gamma$ und setze $\varphi(x, y) = (a \cdot x, x \cdot y)$. Zeige, dass $(X; \varphi)$ ein TDS ist, und bestimme die rekurrenten Punkte.

8. Sei $(X; \varphi)$ ein TDS und sei $x_0 \in X$ rekurrent. Zeige, dass für $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ der Punkt x_0 auch φ^m-rekurrent ist. *Hinweis: betrachte eine Gruppenerweiterung von X mit der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}_m$!*

9. Sei $(X; \varphi)$ ein TDS Beweise die Äquivalenz folgender Aussagen:

a) $(X; \varphi)$ ist topologisch-ergodisch.
b) Für jede offene Menge $\emptyset \neq U, V$ existiert $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, mit $\varphi(U) \cap V \neq \emptyset$.

10. Keine Ergodentheorie – nur Schubfachprinzip. Wir untersuchen wie gut eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ durch rationale Zahlen approximiert werden kann.

a) Sei $n \in \mathbb{N}$ fest gegeben. Zu zeigen ist die Existenz von $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{n q_n}$$

b) Zeige, dass $p_n, q_n \in \mathbb{Z}$ sogar so gewählt werden können, dass

$$\left| x - \frac{p_n}{q_n} \right| < \frac{1}{q_n^2} \quad \text{gilt.}$$

c) Zeige, dass $q_n \to +\infty$.

Vegrleiche dies mit dem Satz von Hardy-Littlewood!