TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

1. Übung

1. Rekursive Folgen:

a) Rekursiv definieren wir die Folgen a_n und b_n:

$$0 < b_1 < a_1 \text{ beliebig}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} := \frac{2a_n b_n}{a_n + b_n} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass beide Folgen konvergent sind und denselben Grenzwert haben.

b) Wir mischen Wein und Wasser folgenderweise: Wir haben zwei Gläser: das eine mit 200ml Wein, das andere mit 200ml Wasser gefüllt; in jedem einzelnen Mischschritt nehmen wir einen Löffel voll Fluid ($x$ml) aus dem linken Glas und giessen wir ihn ins zweite, dort mischen wir die zwei Fluide mit dem Löffel. Gleich danach wiederholen wir die ganze Prozedur umgekehrt: einen Löffel (genau $x$ml) Fluid von Rechts nacht Links überbringen. Seien a_n jeweils b_n die Konzentrazionen des Weins in den jeweiliegen Gläser nach Zeitschritt n, also z.B. $a_0 = 1$, $b_0 = 0$. Schreibe die Funktion $\varphi : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ auf, die Änderung der Konzentrazionen in einem Mischschritt beschreibt, d.h. $\varphi^n((a_0, b_0)) = (a_n, b_n)$. Untersuche a_n und b_n auf Konvergenz.

2. Produktmaß:

Wir schreiben die Zahlen x im Intervall $[0,1]$ in dem Zahlensystem zu Basis 2 auf, d.h., $x = 0, x_1 x_2 \ldots$, wobei die Ziffern nur 0 oder 1 sein können. Zum Beispiel:

$$\text{es gilt} \quad \tfrac{2}{3} = 0,101010\ldots10\ldots$$

Für bestimmten Zahlen gibt es aber zwei Möglichkeiten: entweder enden sie mit $100\ldots0\ldots$ oder mit $011\ldots1\ldots$, zum Beispiel:

$$\tfrac{1}{2} = 0,100\ldots0\ldots \quad \text{und} \quad \tfrac{1}{2} = 0,011\ldots1\ldots$$

a) Zeige, dass die Menge solcher ausgefallenen Zahlen eine Lebesgue-Nullmenge ist.

b) Wir können somit $[0,1]$ mit $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ identifizieren (bis auf eine Nullmenge). Bestimme diejenigen Mengen M, die den Zylinder-Mengen $A \subseteq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ entsprechen.

c) Beweise, dass die obigen Mengen M die Borel σ-Algebra in $[0,1]$ erzeugen.

d) Wir setzen $\mu(\{0\}) = \frac{1}{2}$ und $\mu(\{1\}) = \frac{1}{2}$, somit haben wir einen Maßraum $(\{0,1\}, \mathscr{P}(\{0,1\}), \mu)$ definiert. Mache dir klar, was das Produktmaßraum $(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, \widehat{\Sigma}, \widehat{\mu})$ ist. Bestimme zunächst dazu, das Produktmaß der Zylindermengen. Was ist das entsprechende Maß auf $[0,1]$ unter der obigen Identifizerung?

3. Teig-Kneten:

a) Gib die Formel für die "Baker's Transformation" $\varphi : [0,1]^2 \to [0,1]^2$ an!

b) Mache dir die folgende Aussage klar: *"Baker's Transformation ist gleich wie Münzen-Werfen"*!

4. Morse-Folge: Sei $X = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ und $(x_n) \in X$. Um die 0-te Koordinate zu bezeichnen schreiben wir:

$$\ldots x_{-2}x_{-1}, x_0 x_1, x_2 \ldots$$

Auf endlichen $0-1$-Folgen definieren wir eine Rekursion:

$$f_1 = 0,1 \quad f_2 = 0110,1001 \quad f_3 = 0110100110010110,1001011001101001 \quad \text{usw...},$$

d.h. in jedem Schritt ersetzen wir die Nullen durch 0110 und die Einsen durch 1001.

a) Was ist die Länge von f_n?

b) Betrachte f_i als Element von X, wobei "die fehlenden Koordinaten" als 0 betrachtet sind. Zeige, dass für ein $f \in X$ gilt $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ koordinatenweise (also bzgl. der Produkttopologie).

c) Zeige, dass f nicht periodisch ist.

d) Zeige, dass jede endliche $0-1$-Folge e unendlich oft in f vorkommt, und zwischen zwei Auftreten von e sind die Längen der Lücken beschränkt.