Mathematischen Grundlagen und Notationen

Susanne Schimpf

Juni 2008

Es geht in dieser Lerneinheit darum, mathematische Notationen besser zu verstehen und auch selbst korrekt zu benutzen. Außerdem sollen mathematische Grundlagen wie der Umgang mit Mengen und Funktionen gefestigt werden.

1 Mengen

Mengen im mathematischen Sinne können als Elemente z.B. Zahlen, Vektoren aber auch Funktionen enthalten.

Beispiel 1.1.

$$A = \{1, 2, 6, 15.5, -7\} \quad B = \{\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}\}$$

Elemente können in Mengen nicht mehrmals vorkommen. Die Menge die keine Elemente enthält heißt *leere Menge* und wird mit dem Symbol $\emptyset$ notiert.

Oft wollen wir nicht einfach Mengen mit beliebigen Elementen betrachten, sondern gezielt Elemente mit bestimmten Eigenschaften aus einer Grundmenge herausgreifen. Nennen wir unsere Grundmenge M, sieht das dann folgendermaßen aus:

$$U = \{x \in M \,|\, \text{x hat Eigenschaft E}\}.$$

Dabei steht der senkrechte Strich | für "mit der Bedingung, dass". Achtet beim Aufschreiben von Mengen darauf, den senkrechten Strich an der richtigen Stelle zu benutzen und nicht durch Schrägstriche etwa \ oder / zu ersetzen.

Diese abstrakte Darstellung wollen wir uns an einigen Beispielen klarmachen.

Beispiel 1.2.

$$C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 5\}$$

stellt die Menge aller reellen Zahlen dar, die größer als 5 sind.

$$D = \{x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 = 4\}$$

ist die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^2$, die länger sind als 2.

$$E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) < 0 \vee \mathrm{Im}(z) \geq 5\}$$

ist die Menge aller komplexen Zahlen mit Realteil kleiner 0 und Imaginärteil größer gleich 5.

An den Beispielen sieht man, dass es für Grundmengen und Bedingungen viele verschiedene Möglichkeiten gibt. Mehrere Bedingungen können auch durch und $\wedge$ und oder $\vee$ verknüpft werden (siehe Menge E).

Eine *Teilmenge* T von A ist eine Menge, die nur einen Teil der Elemente von A enthält. Man schreibt dann $T \subseteq A$. T ist eine Teilmenge von A wenn gilt:

$$(x \in T) \Rightarrow (x \in A),$$

d.h. jedes Element aus T muss auch in A liegen.
Nach dieser Definition gelten auch die leere Menge und A selbst als Teilmengen von A.

1.1 Intervalle

Intervalle sind eigentlich nur Abkürzungen für bestimmte Teilmengen von $\mathbb{R}$. Ein *abgeschlossenes Intervall* enthällt seine Randpunkte und wird mit $[a, b]$ notiert:

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}.$$

Ein offenes Intervall enthält die Randpunkte nicht. Als Notation wird sowohl $]a, b[$ als auch (a, b) verwendet, wobei letzteres an der Uni gebräuchlicher ist.

$$]a, b[= (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}.$$

1.2 Mengenoperationen

Für zwei Mengen A und B können wir den *Schnitt*, die *Vereinigung* und die *Differenz* definieren:

$$A \cap B := \{x \,|\, x \in A \wedge x \in B\}$$

ist der Schnitt von A und B, d.h. alle Elemente die sowohl in A als auch in B enthalten sind.

$$A \cup B := \{x \,|\, x \in A \vee x \in B\}$$

bezeichnet die Vereinigung von A und B, also alle Elemente die entweder in der einen oder in der anderen Menge enthalten sind.

$$A \setminus B := \{x \,|\, x \in A \wedge x \notin B\}$$

ist die Differenz von A und B, also die Elemente aus A ohne die Elemente aus B.

Hierbei ist wichtig, dass diese Operationen jeweils auf zwei *Mengen* angewandt werden. Möchte man also mit einem einzelnen Element schneiden, vereinigen oder die Differenz bilden, muss dieses in Menegenklammern eingeschlossen werden (siehe Beispiel).

Beispiel 1.3. Sei $A := \{a, b, c, d\}$ und $B := \{b, d, e, f\}$. Dann haben wir $A \cap B = \{b, d\}$, $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f\}$ und $A \setminus B = \{a, c\}$.

Betrachten wir jetzt als $A = \mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen und nehmen an, wir wollen die Null ausschließen. Die Schreibweise $\mathbb{R} \setminus 0$ wäre FALSCH, da 0 ein Element ist und keine Menge. Richtig ist $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Im Gegensatz dazu schreibt man die Menge der reellen Zahlen ohne die ganzen Zahlen als $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, da $\mathbb{Z}$ schon eine Menge ist und nicht etwa $\mathbb{R} \setminus \{\mathbb{Z}\}$.

1.3 Das kartesische Produkt

Man kann zwischen zwei Mengen A und B auch ein Produkt bilden, das sog. *kartesische Produkt* $A \times B$:

$$A \times B := \{(a, b) \,|\, a \in A \wedge b \in B\}.$$

$A \times B$ ist also die Menge aller Paare von denen die erste Komponente ein Element aus A ist und die zweite ein Element aus B. Wenn die Mengen A und B endlich sind, können wir das Produkt konkret aufschreiben:

Beispiel 1.4. $A = \{1, 2\}$, $B = \{4, 10\}$.

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 10), (2, 4), (2, 10)\}.$$

Achtung: Die Reihenfolge der Mengen spielt eine Rolle. Bei $A \times B$ kommt also immer die erste Komponente aus der Menge A und die zweite aus B.

Man kann das kartesische Produkt auch von Intervallen bilden. Diese Schreibweise sieht man häufig im Zusammenhang mit Definitionsbereich von Funktionen. $(x, y) \in [0, 1] \times [2, 5]$ beudeutet also nur, dass x eine Wert zwischen 0 und 1 und y einen Wert zwischen 2 und 5 (die Grenzen jeweils eingeschlossen) annimmt.

2 Funktionen

Funktionen werden in der korrekten mathematischen Notation mit ihrem Definitions- und Wertebereich angegeben:

$$f : X \to Y \quad f(x) = y.$$

Dabei bezeichnet X den *Definitionsbereich*, also den Bereich aus dem die einzusetzenden x-Werte kommen dürfen und Y den *Wertebereich*, d.h. die Menge in der die Funktionswerte liegen. Konkret könnte das z.B. folgendermaßen aussehen:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x) = x^2.$$

In diesem Abschnitt soll deutlich werden, warum es oft sinnvoll und manchmal sogar erforderlich ist, Definitions- und Wertebereiche für Funktionen anzugeben.

Betrachten wir $g(x) = \frac{1}{x}$. Durch diese Schreibweise haben wir nicht festgelegt, welche Werte wir für x erlauben - strenggenommen ist g so gar keine Funktion, da nicht sichergestellt ist, dass der Ausdruck auf der rechten Seite immer definiert ist. Würden wir $x = 0$ einsetzen wäre $\frac{1}{x}$ tatsächlich nicht definiert. Die korrekte Schreibweise ist also:

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Achtet also beim Definieren von Funktionen darauf, über mögliche Definitionslücken nachzudenken und wenn es welche gibt, diese aus dem Definitionsbereich auszuschließen. Andererseits kann es auch hilfreich seien bei gegebenen Funktionen den Definitionsbereich genau anzuschauen, werden einzelne Werte ausgeschlossen, so ist es wahrscheinlich, dass an diesen Stellen Definitionslücken, Unstetigkeiten oder andere Unregelmäßigkeiten auftreten.

Als zweites Beispiel nehmen wir nun an, dass wir in einem mathematischen Problem eine Funktion h verwenden wollen, die nur positive Werte annehmen darf. Die Funktionsvorschrift für h soll $h(x) = \sin(x)$ sein. Diese Funktion hat auf ihrem maximalen Definitionsbereich ($\mathbb{R}$) durchaus negative Funktionswerte. Das können wir aber beeinflussen, indem wir für x z.B. nur Werte zwischen $\pi/4$ und $\pi/2$ erlauben. Die korrekte Definition sieht dann folgendermaßen aus:

$$h : [\pi/4, \pi/2] \to \mathbb{R} \quad h(x) = \sin(x).$$

Wenn ihr also mit Funktionen arbeitet, schaut euch den Definitionsbereich an und überlegt, was dieser für die Funktion bedeutet! Vielleicht werden wie in diesem Beispiel nur positive Funktionswerte angenommen oder Nullstellen ausgeschlossen. Das sieht man nicht, wenn man nur auf die Funktionsvorschrift $f(x) = y$ achtet.

3 Notation

Abschließend noch ein paar Hinweise zum Aufschreiben von Matehmatik allgemein. Als erstes sollte man sich immer bewusst sein, dass der eigene Text für Andere verständlich sein muss. Das Argument "Ich weiß ja, was ich meine", reicht nicht, sobald Andere das was Ihr aufschreibt lesen, verstehen und ev. auch bewerten wollen. Lasst den Leser an Eurem Gedankengang teilhaben! Es ist nicht falsch, auch bei mathematischen Ausarbeitungen deutsche Sätze zu verwenden - im Gegenteil, es macht die Texte lesbarer, strukturierter und besser verständlich.

Grundsätzlich gilt: Antworten müssen begründet werden. Dabei sollte man versuchen, sich präzise auszudrücken und nicht "rumzulabern". Wenn es euch schwer fällt, Antworten verständlich aufzuschreiben, ist es oft ein Hinweis darauf, dass euch selbst noch nicht ganz klar ist, was ihr eigenlich sagen wollt oder warum eure Begründung richtig ist. Fragt dann ruhig nochmal bei Übungsleitern oder Tutoren nach!

Beispiel 3.1. Hier mal zwei Beispiele wie man auf die Frage *Nimmt die Funktion* $f : \mathbb{R} \to R, f(x) = -x^2 + 3e^x$ *auf dem Intervall* $[0, 5]$ *ein Minimum und Maximum an?* antworten kann.

Negativbeispiel:

Weil f eine kompakte Funktion ist muss es ein Maximum annehmen auf K, dafür gab es so einen Satz. Ist eigentlich ja auch klar, wenn man sich die e-Funktion vorstellt sieht man das schon.

Positivbeispiel:

Ich möchte den Satz vom Minimum und Maximum aus dem Skript S.90 verwenden. Dafür muss ich zeigen, dass f eine stetige Funktion ist und, dass das Intervall kompakt ist. f ist eine Summe aus einem Polynom und einer e-Funktion, die beide stetig sind. Daher ist auch f als Summe dieser Funktionen stetig. (*Hier kann man ev. noch den Satz aus dem Skript angeben, der das aussagt, wenn man ihn gerade parat hat*).

Das Intervall $[0, 5]$ ist abgeschlossen da es seine beiden Randpunkte 0 und 5 enthält. Außerdem ist es beschränkt, z.B. durch die Schranke 6, es gilt $|x| < 6$ für alle $x \in [0, 5]$. Also ist es nach der Definition von Kompaktheit eine kompakte Menge.

Aus dem Satz vom Minimum und Maximum folgt dann, dass f auf dem kompakten Intervall $[0, 5]$ ein Minimum und ein Maximum annimmt.

An diesen Beispielen im Kontrast sieht man sehr gut, worauf es beim Aufschreiben ankommt. Im Negativbeispiel wird die Menge K verwendet, die kam in der Aufgabenstellung gar nicht vor! Verwendet also keine Variablen, die ihr vorher nicht definiert habt und achtet drauf, dass ihr Variablennamen nicht in der selben Aufgabe doppelt verwendet.

Schreibt auf, welche Sätze ihr verwenden wollt und was die für Voraussetzungen haben. Bei längeren Begründungen oder Beweisen sollte man am Anfang erwähnen was man genau zeigen möchte. Treten mehrere Fälle auf (z.B. $x < 0, x = 0, x > 0$), die in der Begründung unterschieden werden, macht das auch optisch deutlich: *Fall 1:* $x > 0$ usw..

3.1 Gauß-Algorithmus

Bei Durchführen des Gauß-Algorithmus oder beim Invertieren von Matrizen kann die Rechnung schon mal etwas länger werden. Deshalb ist es hier besonders wichtig, dass ihr Rechenschritte rechts am Rand dokumentiert. Sonst kann am Ende niemand mehr eure Schritte nachvollziehen und auch ihr selbst werdet Probleme haben, Fehler in euren eigenen Lösungen zu finden!

Um eure Rechnungen zu erklären gibt es verschiedene Möglichkeiten. Unübersichtlich und nicht nachvollziehbar sind Striche oder Pfeile zwischen einzelnen Zeilen, die mit $+, -$ und Multiplikationen versehen sind. Diese Notation ist oft nicht eindeutig und es wird nicht klar, welche Zeilen nun addiert oder voneinander abgezogen werden und wo dann das neue Ergebnis steht.

Besser ist es, die einzelnen Zeilen mit römischen Zahlen oder Z1, Z2, Z3 usw. zu bezeichnen und diese Abkürzungen dann zur Dokumentation der Rechenschritte zu benutzen. Schreibt immer neben die Zeile die *verändert* werden soll, was genau mit ihr gemacht wird! Möchte man z.B. von der zweiten Zeile die Erste abziehen, schreibt man neben die zweite Zeile $Z2 - Z1$ oder ähnliches. Das Ergebnis dieser Rechnung ist dann die neue zweite Zeile im nächsten Schritt.

Mit dieser Notation wird der Gauß-Algorithmus übersichtlich und für den Korrektor (und euch selbst) gut lesbar und nachvollziehbar.

3.2 Gleichheit zeigen

Wenn ihr Gleichheiten nachweisen sollt, ist es *keine* gültige Beweistechnik, von der Hypothese auszugehen und so lange umzuformen, bis man eine wahre Aussage, z.B. $1 = 1$ erhält. Dazu ein kurzes Beispiel:

Beispiel 3.2. Zu zeigen: $3 = 4$. Nehmen wir also an $3 = 4$ und folgern $4 = 3$. Da wir von der Richtigkeit der beiden Aussagen ausgehen, addieren wir die Gleichungen und erhalten $7 = 7$, offensichtlich wahr. Trotzdem ist dadurch die ursprüngliche Annahme nicht gezeigt!

Wie soll man also vorgehen, um Gleichungen oder Ungleichungen zu beweisen? Dafür gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Die oben dargestellte Technik kann benutzt werden, solange man nur Äquivalenzumformungen durchführt. Das überprüft man am besten, indem man alle Schritte, von der wahren Aussage angefangen, rückwärts aufschreibt.

Diese Vorgehensweise ist allerdings in der Mathematik eher unüblich, normalerweise fängt man mit einer Seite der (Un-)gleichung an und formt diese dann so lange um, bis man die andere erreicht hat. Das ist auch für den Leser am übersichtlichsten.

Dazu noch ein abschließendes Beispiel:

Beispiel 3.3. Zu zeigen: $\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

Wir beginnen mit der linken Seite und rechnen so lange, bis die rechte herauskommt:

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$