Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo

Übung zum Aufschreiben und mathematischen Grundlagen

Aufgabe 1

(a) Schreibe die Menge A in Worten auf!

$$A = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1| \geq 5 \wedge x_2 = 3n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Schreibe in Mengenschreibweise

- Die Menge B aller ungeraden ganzen Zahlen
- Die Menge C aller Vektoren aus $\mathbb{R}^2$, deren Länge kleiner als 10 ist.
- Die Menge D aller einmal stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^2$, die an der Stelle $(0, 0)$ den Wert 2 oder an der Stelle $(1, 1)$ einen Wert zwischen -1 und 1 annehmen.
- Die Menge E der komplexen Zahlen mit positivem imaginärteil.

Aufgabe 2

Bilde das kartesische Produkt $A \times B$:

(a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$

(b) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 2 < x \leq 4\}$, $B = \{-0.5, 0, 0.5\}$
Zeichen hier $A \times B$ auch in ein Koordinatensystem ein!

Aufgabe 3

(a) Schreibe die Menge $S = [0, 5)$ als Schnitt von zwei Mengen S_1, S_2.

(b) Notiere als Differenz von 2 Mengen:

- Die rationalen Zahlen ohne die Zahlen $-42, -4, \frac{13}{8}, 105$.
- Die reellen Zahlen ohne das Intervall $[8, 9]$.
- Die Menge $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \vec{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Aufgabe 4

(a) Was ist ein sinnvoller Definitions- und Wertebereich für die Funktion f:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 1}, \frac{1}{x}\right)^T ?$$

(b) Betrachte

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_1(x) = x^2$$

und

$$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad f_2(x) = x^2.$$

Gibt es Umkehrfunktionen zu f_1 und f_2?

(c) Wir betrachten

$$g_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R} \quad g_1(x) = \sqrt{x}$$

und

$$g_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad g_2(x) = \sqrt{x}$$

Sind g_1 und g_2 differenzierbar auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich?

(d) Sei $A = \{a, b\}$. Die Menge der Teilmengen von A bezeichnen wir mit $P(A)$. Schreibe $P(A)$ auf! Betrachte nun die Funktion

$$h : P(A) \times \{\{a\}, \{b\}\} \to P(A) \quad (x, y) \mapsto x \cap y.$$

Stelle eine Tabelle der Funktionswerte von h auf!

(e) Die Funktion L sei gegeben durch

$$L : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \quad (L(u))(x) = u'(x).$$

Beschreibe den Definitions- und Wertebereich von L! Was tut die Funktion?
Schreibe die beiden Bedingungen auf, die erfüllt sein müssen, damit L linear ist!

Aufgabe 5

(a) Zeichen die folgenden Mengen im $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{|x|} \leq 5\}$$

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 2\} \setminus \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}.$$

Sind die Mengen jeweils abgeschlossen, beschränkt, kompakt?
Arumentiere anhand der Definitionen dieser Begriffe!

(b) Betrachte $f : (0, 5) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$. Ist f stetig auf $(0, 5)$? Nimmt die Funktion ein Maximum an? Kann man das durch den Satz vom Minimum und Maximum begründen?

(c) Wir wollen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit untersuchen. Dazu wird oft *fälschlicherweise* die folgende Methode verwendet:
Man löse das Gleichungssystem $\gamma\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{c}$. Gibt es Lösungen, so sagt man, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig. Kommt man allerdings zu einem Widerspruch, so sind sie linear unabhängig.
Wende diese Methode für die gegebenen Vektoren an und prüfe danach noch einmal mit der Definition aus dem Skript! Was fällt auf?