Mathematatik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo

Übung zum Aufschreiben und mathematischen Grundlagen
Lösungsvorschlag

Aufgabe 1

(a) Schreibe die Menge A in Worten auf!

$$A = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x_1| \geq 5 \wedge x_2 = 3n \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}.$$

(b) Schreibe in Mengenschreibweise

- Die Menge B aller ungeraden ganzen Zahlen
- Die Menge C aller Vektoren aus $\mathbb{R}^2$, deren Länge kleiner als 10 ist.
- Die Menge D aller einmal stetig partiell differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}^2$, die an der Stelle $(0,0)$ den Wert 2 oder an der Stelle $(1,1)$ einen Wert zwischen -1 und 1 annehmen.
- Die Menge E der komplexen Zahlen mit positivem Imaginärteil.

Lösung

(a) A ist die Menge aller Vektoren im $\mathbb{R}^2$, bei denen die erste Komponente größer gleich 5 oder kleiner gleich -5 ist und die zweite ein positives Vielfaches von 3.

(b)
- $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \text{ ungerade}\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x = 2z + 1 \text{ für ein } z \in \mathbb{Z}\}$.
- $C = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| < 10\} = \{\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 10\}$
- $D = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \,|\, f(0,0) = 2 \vee -1 < f(1,1) < 1\}$
- $E = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}(z) > 0\} = \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\}$

Aufgabe 2

Bilde das kartesische Produkt $A \times B$:

(a) $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, d\}$

(b) $A = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 2 < x \leq 4\}$, $B = \{-0.5, 0, 0.5\}$
Zeichen hier $A \times B$ auch in ein Koordinatensystem ein!

Lösung

(a) $A \times B = \{(a, b), (a, d), (b, b), (b, d), (c, b), (c, d)\}$.

(b) $A \times B = \{(3, -0.5), (3, 0), (3, 0.5), (4, -0.5), (4, 0), (4, 0.5)\}$

Aufgabe 3

(a) Schreibe die Menge $S = [0, 5)$ als Schnitt von zwei Mengen S_1, S_2.

(b) Notiere als Differenz von 2 Mengen:
- Die rationalen Zahlen ohne die Zahlen $-42, -4, \frac{13}{8}, 105$.
- Die reellen Zahlen ohne das Intervall $[8, 9]$.
- Die Menge $U = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \vec{x} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

Lösung

(a) $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 5\}$, $S_2 = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq 0\}$. Das ist nur eine mögliche Lösung, es gibt noch viele andere richtige Mengen.

(b)
- $\mathbb{Q} \setminus \{-42, -4, \frac{13}{8}, 105\}$
- $\mathbb{R} \setminus [8, 9]$
- $\mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$

Aufgabe 4

(a) Was ist ein sinnvoller Definitions- und Wertebereich für die Funktion f:

$$f(x) = \left(\frac{1}{x^2 - 1}, \frac{1}{x}\right)^T ?$$

(b) Betrachte

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f_1(x) = x^2$$

und

$$f_2 : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad f_2(x) = x^2.$$

Gibt es Umkehrfunktionen zu f_1 und f_2?

(c) Wir betrachten

$$g_1 : [0, \infty) \to \mathbb{R} \quad g_1(x) = \sqrt{x}$$

und

$$g_2 : (0, \infty) \to \mathbb{R} \quad g_2(x) = \sqrt{x}$$

Sind g_1 und g_2 differenzierbar auf ihrem jeweiligen Definitionsbereich?

(d) Sei $A = \{a, b\}$. Die Menge der Teilmengen von A bezeichnen wir mit $P(A)$. Schreibe $P(A)$ auf! Betrachte nun die Funktion

$$h : P(A) \times \{\{a\}, \{b\}\} \to P(A) \quad (x, y) \mapsto x \cap y.$$

Stelle eine Tabelle der Funktionswerte von h auf!

(e) Die Funktion L sei gegeben durch

$$L : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R}) \quad (L(u))(x) = u'(x).$$

Beschreibe den Definitions- und Wertebereich von L! Was tut die Funktion?
Schreibe die beiden Bedingungen auf, die erfüllt sein müssen, damit L linear ist!

Lösung

(a) $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\} \quad \mathbb{W}_f = \mathbb{R}^2$.

(b) Nur f_2 hat eine Umkehrfunktion. Da für x nur positive Werte erlaubt sind, ist f_2 streng monoton steigend. Daher gibt es zu jedem $y > 0$ genau ein x mit $f(x) = y$ und man kann eine Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ definieren.
Zu f_1 gibt es keine Umkehrfunktion, da es y-Werte gibt, die durch mehrere x-Werte erzeugt werden. Zum Beispiel ist bekommt man $y = 4$ sowohl für $x = 2$ als auch für $x = -2$. Es gibt also kein eindeutiges x zu jedem y, deshalb ist f_1 nicht umkehrbar.

(c) g_2 ist auf dem gesamten Definitionsbereich differenzierbar. g_1 ist an der Stelle $x = 0$ nicht differenzierbar. Das zeigen wir mit dem Differenzenquotienten:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = \infty.$$

Das bedeutet, dass der Differenzenquotient an der Stelle 0 nicht gegen einen endlichen Wert konvergiert - g_1 ist dort also nicht differenzierbar!

(d) $P(A) = \{\{a, b\}, \{a\}, \{b\}, \emptyset\}$.

$x \backslash y$	$\{a\}$	$\{b\}$
$\{a, b\}$	$\{a\}$	$\{b\}$
$\{a\}$	$\{a\}$	$\emptyset$
$\{b\}$	$\emptyset$	$\{b\}$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

In der Tabelle stehen die Funktionswerte für jede mögliche Kombination von x und y Werten.

(e) Der Definitionsbereich von L ist die Menge der einmal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$. Der Wertebereich ist die Menge der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. L ordnet einer Funktion u ihre Ableitung u' zu.
L ist linear, wenn gilt:

$$\begin{aligned} &(L(u + v))(x) = (L(u))(x) + (L(v))(x) && u, v \in C^1(\mathbb{R}) \\ &(L(\lambda u))(x) = (\lambda L(u))(x) && u \in C^1(\mathbb{R}), \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Zeichen die folgenden Mengen im $\mathbb{R}^2$:

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{|x|} \leq 5\}$$

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 2\} \setminus \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, |x| \leq 1\}.$$

Sind die Mengen jeweils abgeschlossen, beschränkt, kompakt?
Arumentiere anhand der Definitionen dieser Begriffe!

(b) Betrachte $f : (0, 5) \to \mathbb{R} \quad f(x) = \frac{1}{(x-5)^2}$. Ist f stetig auf $(0, 5)$? Nimmt die Funktion ein Maximum an? Kann man das durch den Satz vom Minimum und Maximum begründen?

(c) Wir wollen die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ auf lineare Abhängigkeit untersuchen. Dazu wird oft *fälschlicherweise* die folgende Methode verwendet:
Man löse das Gleichungssystem $\gamma\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{c}$. Gibt es Lösungen, so sagt man, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sind linear abhängig. Kommt man allerdings zu einem Widerspruch, so sind sie linear unabhängig.
Wende diese Methode für die gegebenen Vektoren an und prüfe danach noch einmal mit der Definition aus dem Skript! Was fällt auf?

Lösung

(a) BILD
A ist unbeschränkt. Das sieht man am Bild und durch folgende Überlegung:

$$A = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 \leq 5|x|\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{1}{5} \leq |x|\},$$

d.h. A enthält alle Vektoren, die länger sind als $\frac{1}{5}$. Diese können natürlich nicht durch einen Kreis mit festem Radius eingeschlossen werden.
Die Menge A enthält ihre Randpunkte, das sind die Vektoren mit Länge 5, also ist sie abgeschlossen.

B ist nicht abgeschlossen. Die Menge bildet einen Kreisring, dessen äußerer Rand enthalten ist, der innere jedoch nicht. Das kann man auch sehen, wenn man B schreibt als

$$B = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^2 \,|\, 1 < |x| \leq 2\}.$$

B ist durch den äußeren Kreis mit Radius 2 oder einen beliebigen größeren Kreis beschränkt.

Weder A noch B sind kompakt, da sie wie oben gesehen entweder nicht abgeschlossen oder nicht beschränkt sind.

Diese beiden Beispiele sollen verdeutlichen, dass es bei Mengen nicht reicht, nur auf das Relationszeichen ($\leq, <, \geq, >$) zu achten. Die 5 ist keine Schranke für die Menge A, und B ist nicht abgeschlossen obwohl in der ursprünglichen Darstellung nur $\leq$ vorkommt.

(b) f ist eine Komposition stetiger Funktionen und deshalb selbst stetig.
Es gilt $\lim_{x\to 5} f(x) = +\infty$, f nimmt also auf dem Intervall $(0, 5)$ kein Maximum an. Obwohl f stetig ist, kann man also den Satz vom Minimum und Maximum hier nicht anwenden, was daran liegt, dass das Intervall $(0, 5)$ nicht kompakt ist.
Dieses Beispiel zeigt uns, dass man viele Sätze nur unter bestimmten Voraussetzungen anwenden kann und es eben wirklich Gegenbeispiele gibt, wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind.

(c) Wir lösen das Gleichungssystem

$$\lambda \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

Aus der zweiten Zeile folgt direkt $0 + 0 = 1$, ein Widerspruch. Mit der beschriebenen Methode würde man nun folgern, dass die Vektoren linear unabhängig sind.
Betrachten wir das Ganze jetzt nochmal mit der Definition aus dem Skript. Dafür müssen wir das LGS $\gamma\vec{a} + \mu\vec{b} + \lambda\vec{c} = \vec{0}$ lösen:

$$\begin{aligned} \gamma + 2\mu &= 0 \\ \lambda &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Es folgt sofort $\lambda = 0$ und $\gamma = -2\mu$. Eine mögliche Lösung wäre also $\mu = 1$, $\gamma = -2$, $\lambda = 0$. Es gibt also eine Lösung, bei der nicht alle Koeffizienten 0 sind, das bedeutet die Vektoren sind linear abhängig.

Es fällt auf, das dies im Widerspruch zur ersten Methode steht, diese führt also allgemein *nicht* zur richtigen Lösung!