"Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo"

Übung zur geometrischen Anschauung, Lösungsvorschlag

Bei den Vorliegenden Aufgaben geht es uns hauptsächlich darum dass Sie sich Gedanken darüber machen was hier geometrisch passiert. Es soll nichts, bzw. nur sehr wenig gerechnet werden; das haben wir ja nun auch bereits ausreichend oft geübt. Im Folgenden geht es daher wirklich darum ein gewisses Vorstellungsvermögen zu den entsprechenden Vorgängen zu entwickeln.

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Basis $B = \{\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}\}$ des $\mathbb{R}^2$.

1. Zeichnen Sie (ohne zu rechnen) den Punkt $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B$ in ein zweidimensionales Koordinatensystem.
2. Geben Sie die Koordinaten von P zur Standardbasis S an (keine Rechnung).
3. Die Transformationsmatrix von B nach S ist gegeben durch $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Überprüfen Sie die oben zeichnerisch ermittelten Koordinaten.

Lösung:

1. Man erhält den gesuchten Punkt zeichnerisch indem man einfach die beiden Basisvektoren in das normale Koordinatensystem einzeichnet, dann den ersten zweimal entlanggeht und den zweiten noch einmal.
2. Der Punkt an dem man durch die genannte Technik herauskommt lautet $\begin{pmatrix} 3, & 8 \end{pmatrix}^T$.
3. Auch die "bekannte" Rechnung verifiziert die zeichnerische Lösung:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2:
In dieser Aufgabe untersuchen wir erneut Matrizen welche Spiegelungen darstellen. Wir interessieren uns konkret für die Spiegelung an der Ebene $3x - 2y + 2z = 0$ im $\mathbb{R}^3$. Wir wollen dabei auch hier möglichst wenig rechnen.

1. Geben Sie die Matrix zu der oben erwähnten Spiegelung in Diagonaldarstellung an.

2. Geben Sie eine Basis B des $\mathbb{R}^3$ an, so dass die Matrix dargestellt zur Basis B Diagonalgestalt hat.
3. Geben Sie die Vektoren in B zur Basis B an.
4. Wie sehen die Eigenräume dieser Matrix geometrisch aus ?

Lösung:

1. Man kann sich leicht überlegen, dass die Vektoren in der Ebene auf sich selbst abgebildet, und die Vektoren in der Gerade welche senkrecht auf die Ebene steht auf ihr negatives abgebildet werden. Die Abbildung hat somit die Eigenwerte 1 und -1, wobei der Eigenraum zum Eigenwert 1 (die Ebene) zweidimensional ist. Damit ergibt sich bis auf Permutation der Einträge auf der Hauptdiagonalen die Matrix: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
2. Als Basis dienen Eigenvektoren der Abbildung, also ein Vektor aus der senkrechten Geraden und 2 linear unabhängige Vektoren aus der Ebene, z.B.: $B = \{\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\}$. ACHTUNG: Bei der Anordnung der Basisvektoren auf die Reihenfolge achten !!!
3. Die Vektoren in B zur Basis B dargestellt sehen aus wie die Standardbasisvektoren:

$$\begin{pmatrix} 1.5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Wie bereits erwähnt ist die Ebene an der gespiegelt wird der Eigenraum zum Eigenwert 1 und die darauf senkrecht stehende Ebene der Eigenraum zum Eigenwert -1.

Aufgabe 3: Quadriken

Wir wollen in dieser Aufgabe genauer untersuchen was Quadriken eigentlich sind, bzw. was bei den Rechnungen die wir damit durchführen passiert. Zu diesem Zweck schauen wir uns die Einzelnen Schritte der Berechnung der Quadrik aus Aufgabe H21 noch einmal an und zeichnen die entsprechende Menge nach jedem Schritt. Wir gehen dabei rückwärts vor, fangen also bei der Normalform an:

1. Zeichnen Sie die Quadrik in Normalform: $z_1^2 + 3z_2^2 = 1$.

2. Wir verschieben nun die Ellipse (als Umkehrung der quadratischen Ergänzung um 2/3 in y-Richtung:

$$y_1^2 + 3(y_2 - 2/3)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow y_1^2 + 3(y_2^2 - 4/3y_2) + 1/3 = 0 \Leftrightarrow$$
$$y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_2 + 1/3 = 0$$

   Zeichnen Sie auch diese Menge.

3. Die Quadrik ist nun in der Form

$$\begin{pmatrix} y_1, & y_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} = 0.$$

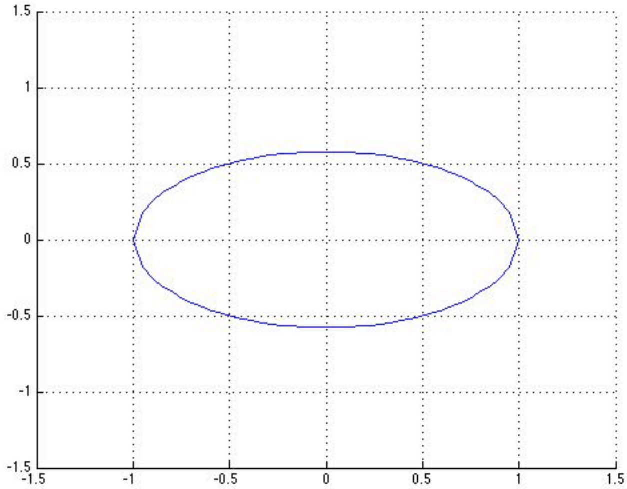
   Das bedeutet sie ist dargestellt zur Basis $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\}$. Wir wollen die Menge welche durch die Quadrik beschrieben wird nun wieder in Standardbasis darstellen. Dazu transformieren wir sie mit der Transformationsmatrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Es handelt sich hierbei um eine Drehung um den Winkel $\pi/4$. Da die Matrix orthogonal ist bleiben alle Längen erhalten. Die Eigenvektoren (Hauptachsen) Hauptachesen lauten $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Wir erhalten die Quadrik in ihrer ursprünglichen Darstellung:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\sqrt{2}, & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} = 0.$$

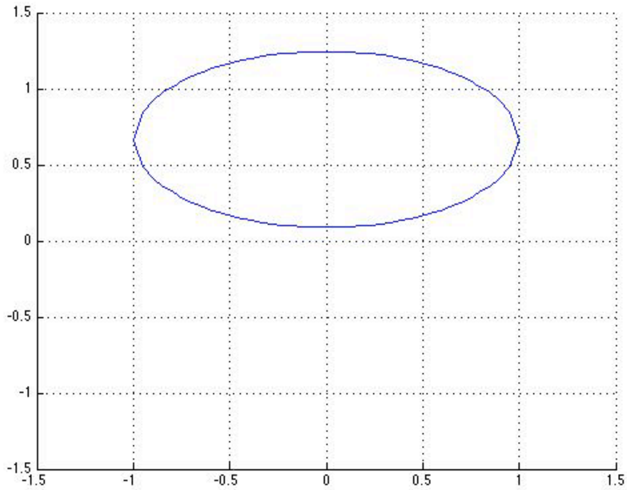
   Zeichnen Sie auch diese Menge.
   Hinweis: Dies geht am besten wenn Sie sich überlegen wo sich Mittelpunkt und Hauptachsen befinden und wie lang diese sind.

Lösung:

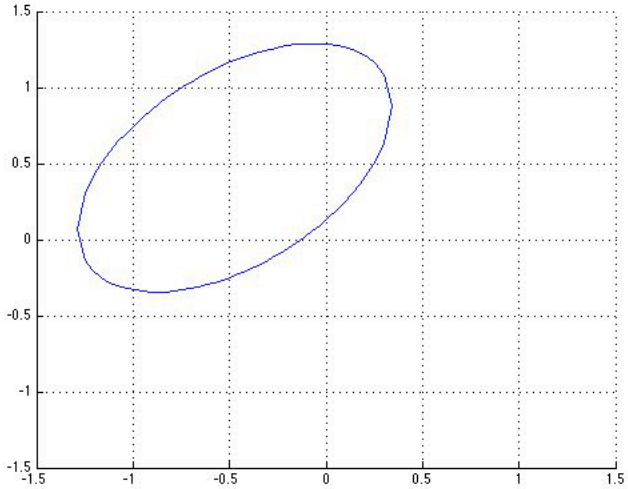
1. Bei dieser Quadrik handelt es sich um eine Ellipse:



2. Verschiebung in y-Richtung:



3. Drehung um 45 Grad:



Aufgabe 4:
Wir haben in G32 gesehen, dass partiell differenzierbare Funktionen nicht einmal stetig sein müssen. Wir wollen diese Aussage nun durch ein Beispiel verifizieren. Wir untersuchen die Funktion:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{1/16x^2+1/16y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f im Punkt $(0, 0)$ in $x-$ und $y-$Richtung.
2. geben Sie die Einschränkung von f auf der Diagonalen $x = y$ an. Ist f stetig?

Lösung:

1. Wir berechnen die partiellen Ableitungen im Punkt $(0, 0)$ mittels Differenzenquotienten:

$$f_x = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$$f_y = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

2. Auf der Diagonalen $x = y$ ist f gegeben durch:

$$f_{|x=y} = \begin{cases} \frac{x^2}{1/8x^2} = 8 & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f kann damit durch den Sprung in $(0,0)$ natürlich unmöglich stetig sein (siehe Bild).