Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2008
Übungsblatt für die letzten zwei Wochen

13. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G43 (Multiple Choice)

(a) ☐ Kurvenintegrale längs geschlossener Kurven sind immer Null.

☐ Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder sind immer Null.

☒ Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder längs Kurven sind nur endpunktabhängig.

☒ Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder längs geschlossener Kurven sind immer Null.

(b) ☒ Parametrisierte Flächen sind die Bilder S stetiger Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ für aus Normalbereichen zusammengesetzte D.

☐ Parametrisierte Flächen sind immer glatt.

☒ Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u^2, u + v^2, v)^T$ beschreibt eine glatte Fläche.

☐ Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (v\cos(u), v\sin(u), v)^T$ beschreibt eine glatte Fläche.

Lösung:

(a) Siehe Seiten 154 - 158 im Skript.

(b) (i) Siehe Definition auf Seite 162 im Skript.
(ii) Nicht jede parametrisierte Fläche ist glatt, siehe (iv).
(iii) Diese Fläche ist glatt, denn $g_u(u, v) = (2u, 1, 0)^T$ und $g_v(u, v) = (0, 2v, 1)^T$ und $g_u(u, v) \times g_v(u, v) = (1, -2u, 4uv)^T \neq (0, 0, 0)^T$. (Siehe Definition auf Seite 163 im Skript.)
(iv) Diese Fläche ist nicht glatt, denn $g_u(u, v) = (-v\sin(u), v\cos(u), 0)^T$ und $g_v(u, v) = (\cos(u), \sin(u), 1)^T$ und $g_u(u, v) \times g_v(u, v) = (v\cos(u), v\sin(u), -v)^T$ und dies ist $(0, 0, 0)^T$ für $v = 0$. Es handelt sich bei dieser Fläche um einen Doppelkegel, der rotationssymetrisch zur z-Achse ist und dessen Spitze im Ursprung ist. Wegen dieser Spitze ist die Fläche nicht glatt.

Aufgabe G44 (Reguläre Flächen, Normaleneinheitsvektoren, Oberflächenintegrale)

(a) Entscheiden Sie, ob die Bilder der folgenden Funktionen reguläre Flächen sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Normaleneinheitsvektoren.

i. $g : (-\pi; \pi) \times \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $(u, v) \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))^T$.
ii. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u^2, u^3, v)^T$.
iii. $g : (1; 2) \times (0; 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (v\cos(u), v\sin(u), v)^T$.

(b) Sei S das Bild von g aus (a) i. Bestimmen Sie den Flächeninhalt $\iint_S 1\, dO$ und das Integral $\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dO$.

(c) Sei T das Bild von g aus (a) iii. und $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (-yz, xz, x^2+y^2)^T$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie $\iint_T w \cdot dO$.

Lösung:

(a) i. Es ist $(-\pi;\pi) \times \left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ ein Produkt von Intervallen, also auch Normalbereich und es gilt:

$$
\begin{aligned}
g_u(u,v) \times g_v(u,v) &= \begin{pmatrix} -\sin(u)\sin(v) \\ \cos(u)\sin(v) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(u)\cos(v) \\ \sin(u)\cos(v) \\ -\sin(v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(u)^2\sin(v)\cos(v) - \cos(u)^2\sin(v)\cos(v) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(u)\sin(v)^2 \\ -\sin(v)\cos(v) \end{pmatrix} = \sin(v) \cdot \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v) \\ -\sin(u)\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Da $\sin(v)$ für $v \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)$ nicht Null ist (liegt zwischen $\frac{\sqrt{2}}{2}$ und 1) und $\cos(u)$ und $\sin(u)$ niemals gleichzeitig Null sind, ist dieser Vektor niemals $(0,0,0)^T$, also handelt es sich um eine reguläre Fläche. Der Normaleneinheitsvektor ist die Funktion

$$
\begin{aligned}
n(u,v) &= \frac{g_u(u,v) \times g_v(u,v)}{|g_u(u,v) \times g_v(u,v)|} = \frac{\sin(v) \cdot \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v) \\ -\sin(u)\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}}{\left|\sin(v) \cdot \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v) \\ -\sin(u)\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}\right|} \\
&= \underbrace{\frac{\sin(v)}{|\sin(v)|}}_{=1,\text{ da } \sin(v) > \frac{\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{(-\cos(u)\sin(v), -\sin(u)\sin(v), -\cos(v))^T}{\sqrt{\cos(u)^2\sin(v)^2 + \sin(u)^2\sin(v)^2 + \cos(v)^2}} \\
&= \frac{(-\cos(u)\sin(v), -\sin(u)\sin(v), -\cos(v))^T}{\sqrt{\sin(v)^2 + \cos(v)^2}} = \begin{pmatrix} -\cos(u)\sin(v) \\ -\sin(u)\sin(v) \\ -\cos(v) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

ii. Wir rechnen:

$$
g_u(u,v) \times g_v(u,v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 3u^2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2 \\ -2u \\ 0 \end{pmatrix}.
$$

Da dieser Vektor für $u = 0$ Null ist, haben wir keine reguläre Fläche. Nimmt man aber als g-Definitionsbereich $\mathbb{R}\setminus\{0\} \times \mathbb{R}$, so haben wir eine reguläre Fläche mit Normaleneinheitsvektor

$$n(u,v) = \frac{g_u(u,v) \times g_v(u,v)}{|g_u(u,v) \times g_v(u,v)|} = \frac{\begin{pmatrix} 3u^2 \\ -2u \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3u^2 \\ -2u \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 3u^2 \\ -2u \\ 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{9u^4+4u^2}} = \frac{1}{\sqrt{9u^2+4}} \begin{pmatrix} 3u \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

iii. Es ist $(1;2) \times (0;2\pi)$ ein Produkt von Intervallen, also auch Normalbereich und es gilt:

$$g_u(u,v) \times g_v(u,v) = \begin{pmatrix} -v\sin(u) \\ v\cos(u) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos(u) \\ v\sin(u) \\ -v. \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor ist niemals $(0,0,0)^T$, da $-v \in (-2\pi;0)$, also handelt es sich um eine reguläre Fläche. Der Normaleneinheitsvektor ist die Funktion

$$n(u,v) = \frac{g_u(u,v) \times g_v(u,v)}{|g_u(u,v) \times g_v(u,v)|} = \frac{\begin{pmatrix} v\cos(u) \\ v\sin(u) \\ -v. \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} v\cos(u) \\ v\sin(u) \\ -v. \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{2v^2}} \begin{pmatrix} v\cos(u) \\ v\sin(u) \\ -v. \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ -1. \end{pmatrix}.$$

(b) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\iint_S 1\, dO &= \iint_{(-\pi;\pi)\times\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)} 1 \cdot |g_u(u,v) \times g_v(u,v)|\; d(u,v) \\
&= \iint_{(-\pi;\pi)\times\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)} \left|\sin(v) \cdot \sqrt{\cos(u)^2\sin(v)^2 + \sin(u)^2\sin(v)^2 + \cos(v)^2}\right| \, d(u,v) \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(v)\, dv\, du = \int_{-\pi}^{\pi} \left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) du = 2\pi \cdot \sqrt{2}
\end{aligned}$$

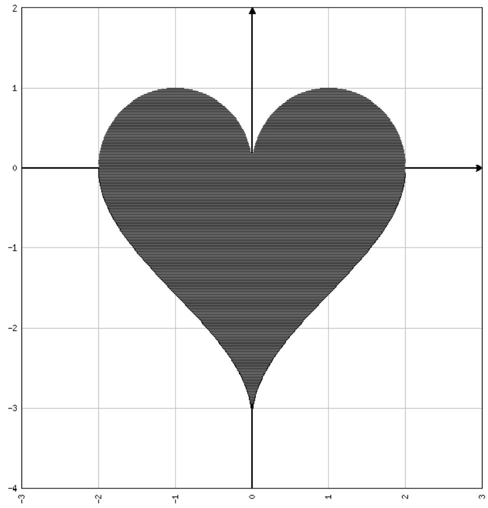
und

$$\begin{aligned}
\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\, dO &= \iint_{(-\pi;\pi)\times\left(\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right)} \frac{|g_u(u,v) \times g_v(u,v)|\; d(u,v)}{\sqrt{\cos(u)^2\sin(v)^2 + \sin(u)^2\sin(v)^2 + \cos(v)^2)}} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin(v)\, d(u,v) = 2\pi \cdot \left(-\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}\pi.
\end{aligned}$$

(c) Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\iint_T w \cdot dO &= \iint_{(1;2)\times(0;2\pi)} w(g(u,v)) \cdot (g_u(u,v) \times g_v(u,v))\; d(u,v) \\
&= \iint_{(1;2)\times(0;2\pi)} w(v\cos(u), v\sin(u), v) \cdot (v\cos(u), v\sin(u), -v)^T\, d(u,v) \\
&= \iint_{(1;2)\times(0;2\pi)} (-v^2\sin(u), v^2\cos(u), v^2)^T \cdot (v\cos(u), v\sin(u), -v)^T\, d(u,v) \\
&= \int_1^2 \int_0^{2\pi} -v^3\, dv\, du = 1 \cdot \left[\frac{-v^4}{4}\right]_{v=0}^{v=2\pi} = -4\pi^4.
\end{aligned}$$

Aufgabe G45 (Satz von Green)



Wir erinnern uns an das Herz H aus Aufgabe H33, zusammengesetzt aus den Stücken

$$H_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 < x < 2 \text{ und } 0 < y < \sqrt{1-(x-1)^2} \right\}$$
$$H_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -2 < x < 0 \text{ und } 0 < y < \sqrt{1-(x+1)^2} \right\}$$
$$H_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -\cos(y) - 1 < x < \cos(y) + 1 \text{ und } -\pi < y < 0 \right\}.$$

(a) Zerlegen Sie den Rand ∂H in vier Kurven C_1, C_2, C_3, C_4 und geben sie korrespondierende Parametrisierungen x_1, x_2, x_3, x_4 an.

(b) Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x)^T$. Bestimmen Sie $\oint_{\partial H} w \cdot dx$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Green.

Lösung:

(a) Für die oberen Halbkreise nehmen wir $C_1 = x_1 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t), \sin(t))^T + (1,0)^T = (\cos(t)+1, \sin(t))^T$ und $C_2 = x_2 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (\cos(t)-1, \sin(t))^T$. Für die unteren Stücke des Randes nehmen wir $C_3 = x_3 : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2, t \mapsto (-\cos(t)-1, -t)^T$ und $C_4 = x_4 : [-\pi, 0] \to \mathbb{R}^2, r \mapsto (\cos(r)+1, r)$. Wir haben die Parametrisierungen so gewählt, dass man, wenn man x_1 bis x_4 nach der Reihe abläuft, einmal gegen den Uhrzeigersinn um H herumgelaufen ist.

(b) Wir rechnen einmal direkt:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} w \cdot dx &= \int_{C_1} w \cdot dx_1 + \int_{C_2} w \cdot dx_2 + \int_{C_3} w \cdot dx_3 + \int_{C_4} w \cdot dx_4 \\
&= \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos(t) + 1 - \sin(t) \\ \cos(t) + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&+ \int_0^\pi \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt \\
&+ \int_0^\pi \begin{pmatrix} -\cos(t) - 1 + t \\ -\cos(t) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -1 \end{pmatrix} dt + \int_{-\pi}^0 \begin{pmatrix} \cos(r) + 1 - r \\ \cos(r) + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(r) \\ 1 \end{pmatrix} dr.
\end{aligned}$$

Wir substituieren im letzten Integral $r = t - \pi$, also $dr = dt$ und $t \in [0, \pi]$, und erhalten:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} w \cdot dx &= \int_0^{\pi} \left(\begin{pmatrix} \cos(t) + 1 - \sin(t) \\ \cos(t) + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} -\cos(t) - 1 + t \\ -\cos(t) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t-\pi) + 1 - t + \pi \\ \cos(t-\pi) + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t-\pi) \\ 1 \end{pmatrix} \right) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\begin{pmatrix} \cos(t) + 1 - \sin(t) \\ \cos(t) + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(t) - 1 - \sin(t) \\ \cos(t) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} -\cos(t) - 1 + t \\ -\cos(t) - 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\cos(t) + 1 - t + \pi \\ -\cos(t) + 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(-4\sin(t)\cos(t) + 2\sin(t)^2 + 2\cos(t)^2 + \pi \sin(t) + 2 \right) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(-4\sin(t)\cos(t) + \pi\sin(t) + 4 \right) dt = \left[2\cos(t)^2 - \pi\cos(t) + 4t \right]_{t=0}^{t=\pi} \\
&= (2 + \pi + 4\pi) - (2 - \pi) = 6\pi.
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir den Satz von Green an:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} w \cdot dx &= \iint_H \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial w_1}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y) = \iint_H (1 - (-1))\, d(x,y) \\
&= 2 \cdot \iint_H 1\, d(x,y) \underset{\text{H33 (a) ii.}}{=} 2 \cdot 3\pi = 6\pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe G46 (Satz von Stokes)

Sei $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \right\}$ und $g : D \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto (u, v, \sqrt{1 - u^2 - v^2})^T$ mit Bild S.

(a) Was ist S anschaulich, was sein Rand ∂S? Parametrisieren Sie ∂S mit einem $x : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

(b) Warum ist S glatte Fläche?

(c) Sei $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (z, -x, y)^T$. Bestimmen Sie $\oint_{\partial S} w \cdot dx$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Lösung:

(a) S ist die offene obere Einheitshalbsphäre, ihr Rand ist der Einheitskreisrand in der x-y-Ebene, der parametrisiert werden kann durch $x : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, t \mapsto (\cos(t), \sin(t), 0)^T$.

(b) Es ist D ein Normalbereich und es gilt:

$$g_u(u,v) \times g_v(u,v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{-u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 1. \end{pmatrix}.$$

Dieser Vektor ist niemals $(0,0,0)^T$, also handelt es sich um eine glatte Fläche.

(c) Wir rechnen einmal direkt:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial S} w \cdot dx &= \int_0^{2\pi} w(x(t)) \cdot x'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} -\cos(t)^2\, dt \\
&= \left[-\frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t)) \right]_{t=0}^{t=2\pi} = -\frac{1}{2} \cdot (2\pi - 0) = -\pi.
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir den Satz von Stokes an:

$$\oint_{\partial S} w \cdot dx = \iint_S \operatorname{rot}(w) \cdot dO = \iint_S (\nabla \times w) \cdot dO = \iint_S \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot dO$$

$$= \iint_D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{u}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ \frac{v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} \\ 1 \end{pmatrix} d(u,v) = \iint_D \left(\frac{u+v}{\sqrt{1-u^2-v^2}} - 1 \right) d(u,v)$$

$$= \iint_D \frac{u+v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\, d(u,v) - \iint_D 1\, d(u,v) \overset{D \text{ ist Einheits-}}{\underset{\text{kreisscheibe}}{=}} \iint_D \frac{u+v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\, d(u,v) - \pi.$$

Jetzt führen wir eine Transformation in Polarkoordinaten durch, das heißt wir benutzen die Tranformationsformel im $\mathbb{R}^2$ mit der Funktion $h : (0;1) \times (0;2\pi) \to \mathbb{R}^2, (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$, für die $|\det \mathcal{J}_h(r,\varphi)| = r$ gilt (siehe Seite 141 im Skript):

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{u+v}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\, d(u,v) &= \iint_{(0;1)\times(0;2\pi)} \frac{r(\cos(\varphi)+\sin(\varphi))}{\sqrt{1-r^2}} \cdot r\, d(r,\varphi) \\
&= \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \int_0^{2\pi} (\cos(\varphi)+\sin(\varphi))\, d\varphi\, dr \\
&= \int_0^1 \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} \cdot (\sin(2\pi) - \cos(2\pi) - \sin(0) + \cos(0))\, dr \\
&= \int_0^1 0\, dr = 0.
\end{aligned}$$

Also ist auch nach dem Satz von Stokes $\oint_{\partial S} w \cdot dx = -\pi$.

Aufgabe G47 (Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$)

(a) Wir betrachten erneut das Herz H aus Aufgabe H33 und G45.

i. Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor des Randes ∂H mit der Zerlegeung von ∂H gemäß G45 (a) und der Formel für Normaleneinheitsvektoren an Kurven:

$$n_i(x_i(t)) = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x_i'(t) \right|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x_i'(t).$$

ii. Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (0,x)^T$. Bestimmen Sie $\oint_{\partial H} (w \cdot n)\, ds$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Gauß.

(b) Sei $\mathbb{S}^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1 \right\}$. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Integral $I = \oiint_{\mathbb{S}^2} (x^2+z^2, 2y+e^x, z-\sin(x)y)^T \cdot n(x,y,z)\, dO(x,y,z)$.

Lösung:

(a) i. Wir erinnern uns an x_1, x_2, x_3, x_4 aus G45 (a) und erhalten mit obiger Formel:

$$n_1(x_1(t)) = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$n_2(x_2(t)) = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \right|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$n_3(x_3(t)) = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -1 \end{pmatrix}\right|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\sin(t)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix},$$

$$n_4(x_4(r)) = \frac{1}{\left|\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(r) \\ 1 \end{pmatrix}\right|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(r) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\sin(r)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(r) \end{pmatrix}.$$

ii. Wir rechnen einmal direkt:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} (w \cdot n)\, ds &= \int_{C_1} (w \cdot n_1)\, ds + \int_{C_2} (w \cdot n_2)\, ds + \int_{C_3} (w \cdot n_3)\, ds + \int_{C_4} (w \cdot n_4)\, ds \\
&= \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt + \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} dt \\
&+ \int_0^{\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(t)-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+\sin(t)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} dt \\
&+ \int_{-\pi}^{0} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(r)+1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+\sin(r)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(r) \end{pmatrix} dt.
\end{aligned}$$

Wir substituieren im letzten Integral $r = t - \pi$, also $dr = dt$ und $t \in [0, \pi]$, und erhalten:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} (w \cdot n)\, ds &= \int_0^{\pi} \Bigg(\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(t)-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+\sin(t)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t-\pi)+1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+\sin(t-\pi)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(t-\pi) \end{pmatrix} \Bigg) dt \\
&= \int_0^{\pi} \Bigg(\begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(t)-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(t)-1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+\sin(t)^2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(t)+1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+\sin(t)^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\sin(t) \end{pmatrix} \Bigg) dt \\
&= \int_0^{\pi} \Big((\cos(t)+1) \cdot \sin(t) + (\cos(t)-1) \cdot \sin(t) \\
&+ \frac{(-\cos(t)-1) \cdot (-\sin(t)) + (-\cos(t)+1) \cdot (-\sin(t))}{1+\sin(t)^2} \Big) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sin(t)\cos(t) + \frac{\sin(t)\cos(t) + \sin(t) + \sin(t)\cos(t) - \sin(t)}{1+\sin(t)^2} \right) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(\sin(t)\cos(t) + \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1+\sin(t)^2} \right) dt.
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass gilt: $\big(\sin(t)^2\big)' = 2\sin(t)\cos(t)$. Also rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\oint_{\partial H} (w \cdot n)\, ds &= \int_0^{\pi} \sin(t)\cos(t)\, dt + \int_0^{\pi} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1+\sin(t)^2}\, dt \\
&= \left[\frac{1}{2}\sin(t)^2\right]_{t=0}^{t=\pi} + \int_0^{\pi} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1+\sin(t)^2}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{2\sin(t)\cos(t)}{1+\sin(t)^2}\, dt \\
&\underset{d\ell = 2\sin(t)\cos(t)dt}{\overset{\ell = \sin(t)^2}{=}} \int_0^{0} \frac{1}{1+\ell}\, d\ell = 0.
\end{aligned}$$

Jetzt wenden wir den Satz von Gauß an:

$$\oint_{\partial H} w \cdot dx = \iint_H \operatorname{div}(w) = \iint_H \nabla \cdot w = \iint_H (0+0) = 0.$$

(b) Beachten Sie, dass $\mathbb{S}^2$ glatt ist, da sie die Vereinigung zweier Einheitshalbsphären ist (siehe G46). Außerdem ist $\mathbb{S}^2$ der Rand der Einheitskugel $\mathbb{D}^3 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2+y^2+z^2 < 1 \right\}$. Die Divergenz des zu integrierenden Vektorfeldes ist $2x+3$, also gilt:

$$\begin{aligned} I = \oiint_{\mathbb{S}^2} \begin{pmatrix} x^2+z^2 \\ 2y+e^x \\ z-\sin(x)y \end{pmatrix} \cdot n(x,y,z)\, dO(x,y,z) &= \iiint_{\mathbb{D}^3} (2x+3)\, d(x,y,z) \\ = 2 \iiint_{\mathbb{D}^3} x\, d(x,y,z) + 3 \iiint_{\mathbb{D}^3} 1\, d(x,y,z). \end{aligned}$$

Da das Volumen der Einheitskugel im $\mathbb{R}^3$ bekanntlich $\iiint_{\mathbb{D}^3} 1\, d(x,y,z) = \frac{4}{3}\pi$ ist, haben wir: $I = 2 \iiint_{\mathbb{D}^3} x\, d(x,y,z) + 4\pi$. Nun ist aber $\iiint_{\mathbb{D}^3} x\, d(x,y,z)$ gerade das $\frac{4}{3}\pi$-fache der x-Komponente des Schwerpunktes von $\mathbb{D}^3$. Da die Einheitsvollkugel aber radial zum Ursprung ist, ist ihr Schwerpunkt gerade der Ursprung, also ist $\iiint_{\mathbb{D}^3} x\, d(x,y,z) = 0$, somit $I = 4\pi$.

Übersicht über Integrale und Integralsätze

1. Eindimensionales Integral für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ integrierbar:
$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* für $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F' = f$:
$$\int_a^b f \overset{!}{=} F(b) - F(a).$$

3. *Substitiutionsregel* für $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : [g(a); g(b)] \to \mathbb{R}$ stetig:
$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx \overset{!}{=} \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

4. Zweidimensionales Integral für $I = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig:
$$\iint_I f = \iint_I f(x,y)\,d(x,y) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x,y)\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)\,dx\,dy.$$

5. Zweidimensionales Integral für $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Normalbereich und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig:
$$\iint_B f = \iint_B f(x,y)\,d(x,y) = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\,dy\,dx \text{ oder } \iint_B f = \int_c^d \int_{l(y)}^{r(y)} f(x,y)\,dx\,dy.$$

6. Dreidimensionales Integral für $I = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig:
$$\iiint_I f = \iiint_I f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f\,dz\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_1}^{b_1} f\,dx\,dz\,dy \text{ usw.}$$

7. Dreidimensionales Integral für $B \subseteq \mathbb{R}^3$ Normalbereich und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig:
$$\iiint_B f = \iiint_B f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f\,dz\,dy\,dx \text{ usw.}$$

8. *Zwei- bzw. dreidimensionale Transformationsformel* für $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $g : B \to A$ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig:
$$\iint_A f(x,y)\,d(x,y) \overset{!}{=} \iint_B f(g(u,v)) \cdot |\det \mathcal{J}_g(u,v)|\;d(u,v) \text{ bzw.}$$
$$\iiint_A f(x,y,z)\,d(x,y,z) \overset{!}{=} \iiint_B f(g(u,v,w)) \cdot |\det \mathcal{J}_g(u,v,w)|\;d(u,v,w).$$

9. Kurvenintegral vom Skalarenfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ längs regulärer Kurve $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:
$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t))\,\left|x'(t)\right|\,dt \underset{\text{Kurve } C}{\overset{\text{bei geschlossener}}{=}} \oint_C f\,ds.$$

10. Kurvenintegral vom Vektorfeld $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ längs regulärer Kurve $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:

$$\int_C w \cdot dx = \int_a^b w(x(t)) \cdot x'(t)\, dt \underset{\text{Kurve } C}{\overset{\text{bei geschlossener}}{=}} \oint_C w \cdot dx.$$

11. *Hauptsatz für Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder $w = \nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ längs regulärer Kurven $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:*

$$\int_C w \cdot dx \overset{!}{=} f(x(b)) - f(x(a)) \text{ und bei geschlossener Kurve } C\text{: } \oint_C w \cdot dx = 0.$$

12. Oberflächenintegral vom Skalarenfeld $f : S \to \mathbb{R}$ über S, gegeben durch $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\iint_S f\, dO = \iint_D f(g(u,v))\, |g_u(u,v) \times g_v(u,v)|\, d(u,v) \underset{\text{Fläche } S}{\overset{\text{bei geschlossener}}{=}} \oiint_S f\, dO.$$

13. Oberflächenintegral vom Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ über S, gegeben durch $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\iint_S w \cdot dO = \iint_D w(g(u,v)) \cdot (g_u(u,v) \times g_v(u,v))\, d(u,v) \underset{\text{Fläche } S}{\overset{\text{bei geschlossener}}{=}} \oiint_S w \cdot dO.$$

14. *Satz von Green* für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $w : D \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld, $B \subseteq D$ Bereich mit stückweise regulärem, geschlossenem Rand $\partial B = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, jedes $C_i = x_i : [a; b] \to \mathbb{R}^2$:

$$\int_{C_1} w \cdot dx_1 + \ldots + \int_{C_k} w \cdot dx_k = \oint_{\partial B} w \cdot dx \overset{!}{=} \iint_B \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial w_1}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y).$$

15. *Satz von Stokes* für $w : S \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld über stückweise regulärem S gegeben durch $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit stückweise regulärem, geschlossenem Rand $\partial S = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, jedes $C_i = x_i : [a; b] \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_{C_1} w \cdot dx_1 + \ldots + \int_{C_k} w \cdot dx_k = \oint_{\partial S} w \cdot dx \overset{!}{=} \iint_S \operatorname{rot}(w) \cdot dO = \iint_S (\nabla \times W) \cdot dO.$$

16. *Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$* für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $w : D \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld, $B \subseteq D$ Bereich mit stückweise regulärem, geschlossenem Rand $\partial B = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, jedes $C_i = x_i : [a; b] \to \mathbb{R}^2$, äußerer Normaleneinheitsvektor $n_i : C_i \to \mathbb{R}^2$, $|n_i| = 1$:

$$\int_{C_1} (w \cdot n_1)\, ds + \ldots + \int_{C_k} (w \cdot n_k)\, ds = \oint_{\partial B} (w \cdot n)\, ds \overset{!}{=} \iint_B \operatorname{div}(w) = \iint_B \nabla \cdot w.$$

17. *Satz von Gauß im $\mathbb{R}^3$* für $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $w : D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld, $B \subseteq D$ aus Normalbereichen zusammengesetzt mit stückweise regulärem, orientiertem Rand ∂B und äußerem Normaleneinheitsvektor $n : \partial B \to \mathbb{R}^3$, $|n| = 1$:

$$\oiint_{\partial B} (w \cdot n)\, dO \overset{!}{=} \iiint_B \operatorname{div}(w) = \iiint_B \nabla \cdot w.$$