Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2008
19./20./23. Juni

12. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G39 (Integration über Normalbereiche, Transformationsformel, Polarkoordinaten)

(a) Sei $N = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -\sqrt{1-y^2} \le x \le \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \text{ und } -1 \le y \le 1 \right\}$.

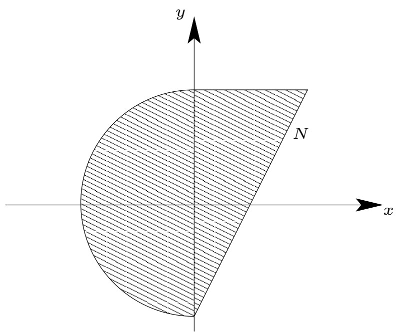
i. Skizzieren Sie N. Um welchen Typ Normalbereich handelt es sich hier?

ii. Berechnen Sie $\int_N 2xy \, d(x,y)$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \, d(x,y)$ mit Hilfe der Transformationsformel und der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \times (0;2\pi) \to \mathbb{R}^2, (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Man nennt diese spezielle Transformation die *Transformation des* $\mathbb{R}^2$ *in Polarkoordinaten*.

Lösung:

(a) i. N ist ein Normalbereich vom Typ II.



ii. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\int_N 2xy \, d(x,y) &= \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}} 2xy \, dx \, dy = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y \right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}} dy \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\left(\frac{y}{2} + \frac{1}{2} \right)^2 y - (1-y^2)y \right) dy = \int_{-1}^{1} \left(\frac{y^3}{4} + \frac{y^2}{2} + \frac{y}{4} - y + y^3 \right) dy \\
&= \left[\frac{y^4}{16} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^2}{8} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4} \right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{6} - \frac{-1}{6} = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

(b) Um die Transformationsformel von Seite 141 im Skript zu benutzen, müssen wir erst den Betrag der Funktionaldeterminate berechnen:

$$|\det \mathcal{J}_g(r,\varphi)| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}\right| = \left|r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2\right| = |r| = r.$$

Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}\, d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}_{>0}\times(0;2\pi)} \frac{e^{-\frac{1}{r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2}}}{(r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2)^2}\cdot r\, d(r,\varphi)\\
&= \int_{\mathbb{R}_{>0}}\int_{(0;2\pi)} \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot r\, d\varphi\, dr = \int_0^\infty \left(\int_0^{2\pi} \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot r\, d\varphi\right) dr\\
&= \int_0^\infty 2\pi\cdot \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot r\, dr = \pi\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot 2r\, dr\\
&\underset{dt=2r\,dr}{\overset{t=r^2}{=}} \pi\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt \underset{ds=-\frac{1}{t^2}dt}{\overset{s=\frac{1}{t}}{=}} \pi\int_\infty^0 -e^{-s}\, ds = \pi\int_0^\infty e^{-s}\, ds\\
&= \pi\cdot\lim_{R\to\infty}\left[-e^{-s}\right]_{s=0}^{s=R} = \pi\cdot\left(\lim_{R\to\infty} -e^{-R} - (-e^0)\right) = \pi\cdot(0+1) = \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe G40 (Schwerpunktberechnung mittels Integration)

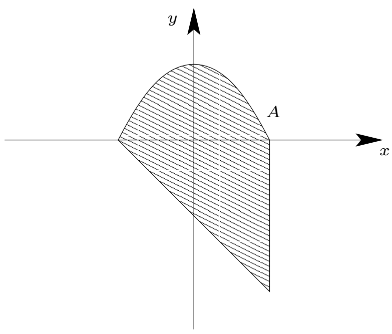
Der Schwerpunkt eines Normalbereichs $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein Punkt $(x_s, y_s) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ für den man folgende Formeln hat: $x_s = \frac{\int_A x\, d(x,y)}{\int_A 1\, d(x,y)}$ und $y_s = \frac{\int_A y\, d(x,y)}{\int_A 1\, d(x,y)}$ bzw. $x_s = \frac{\int_B x\, d(x,y,z)}{\int_B 1\, d(x,y,z)}$ und $y_s = \frac{\int_B y\, d(x,y,z)}{\int_B 1\, d(x,y,z)}$ und $z_s = \frac{\int_B z\, d(x,y,z)}{\int_B 1\, d(x,y,z)}$.

(a) Skizzieren Sie $A = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -x-1 \le y \le -x^2+1 \text{ und } -1\le x\le 1\right\}$ und bestimmen Sie seinen Schwerpunkt.

(b) Sei $B = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2+y^2\le z^2 \text{ und } 0\le z\le 1\right\}$. Um welches geometrisches Objekt handelt es sich bei B? Was ist sein Schwerpunkt?

Lösung:

(a)



Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\int_A 1\, d(x,y) &= \int_{-1}^1\int_{-x-1}^{-x^2+1} 1\, dy\, dx = \int_{-1}^1 [y]_{y=-x-1}^{y=-x^2+1}\, dx\\
&= \int_{-1}^1 \left(-x^2+x+2\right) dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{x=-1}^{x=1} = -\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+2+2 = \frac{10}{3},
\end{aligned}$$

$$\int_A x\, d(x,y) = \int_{-1}^{1} x \int_{-x-1}^{-x^2+1} 1\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} x\, [y]_{y=-x-1}^{y=-x^2+1}\, dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \left(-x^3 + x^2 + 2x\right) dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

$$\int_A y\, d(x,y) = \int_{-1}^{1} \int_{-x-1}^{-x^2+1} y\, dy\, dx = \int_{-1}^{1} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=-x-1}^{y=-x^2+1} dx$$
$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}\left((1-x^2)^2 - (-x-1)^2\right) dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} \cdot \left(-3x^2 + x^4 - 2x\right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[-x^3 + \frac{x^5}{5} - x^2\right]_{x=-1}^{x=1} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = -\frac{2}{15}.$$

Somit hat der Schwerpunkt von A die Koordinaten $(x_s, y_s) = \left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{10}{3}}, \frac{\frac{-2}{15}}{\frac{10}{3}}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{-1}{25}\right)$.

(b) Es handelt sich um einen geraden Kegel der Höhe 1, dessen Spitze der Ursprung ist und die Grundfläche der Einheitskreis auf der Ebene der Höhe 1 parallel zur x-y-Ebene ist. Um das Volumen $\operatorname{vol}(B) = \int_B 1\, d(x,y,z)$ zu berechnen, schreiben wir:

$$B = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \le z^2 \text{ und } 0 \le z \le 1 \right\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 \le z^2 - y^2 \text{ und } 0 \le z \le 1 \right\}$$
$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, -\sqrt{z^2-y^2} \le x \le \sqrt{z^2-y^2} \text{ und } -z \le y \le z \text{ und } 0 \le z \le 1 \right\}.$$

Das Volumen ist also:

$$\int_B 1\, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} 1\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_{-z}^{z} 2\sqrt{z^2-y^2}\, dy\, dz$$
$$\underset{dy=z\cos(u)}{\overset{y=z\sin(u)}{=}} \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{z^2 - z^2\sin(u)^2} \cdot z\cos(u)\, du\, dz$$
$$= \int_0^1 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2z^2 \cdot \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\, du\, dz = \int_0^1 2z^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\, du\, dz$$
$$= \int_0^1 2z^2 \left[\frac{1}{2}(u + \sin(u)\cos(u))\right]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} dz = \int_0^1 2z^2 \cdot \frac{\pi}{2}\, dz = \pi \int_0^1 z^2\, dz$$
$$= \pi \left[\frac{z^3}{3}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{3}.$$

Alternativ kann man die aus der Schule bekannte Formel für das Volumen eines Kegels benutzen: $\operatorname{vol}(B) = \frac{\pi}{3} \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{\pi}{3}$. Wir rechnen weiterhin:

$$\int_B x\, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} x\, dx\, dy\, dz = \int_0^1 \int_{-z}^{z} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=-\sqrt{z^2-y^2}}^{x=\sqrt{z^2-y^2}} dy\, dz$$
$$= \int_0^1 \int_{-z}^{z} 0\, dy\, dz = 0,$$

$$\int_B y\,d(x,y,z) = \int_0^1 \int_{-z}^{z} y \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \int_{-z}^{z} 2y\sqrt{z^2-y^2}\,dy\,dz$$

$$\underset{du=-2ydy}{\overset{u=-y^2}{=}} \int_0^1 \int_{-z^2}^{-z^2} -\sqrt{z^2+u}\,du\,dz = \int_0^1 0\,dz = 0,$$

$$\int_B z\,d(x,y,z) = \int_0^1 z \int_{-z}^{z} \int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} 1\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 z \int_{-z}^{z} 2\sqrt{z^2-y^2}\,dy\,dz$$

$$\underset{dy=z\cos(u)}{\overset{y=z\sin(u)}{=}} \int_0^1 z \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2\sqrt{z^2-z^2\sin(u)^2}\cdot z\cos(u)\,du\,dz$$

$$= \int_0^1 z \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2z^2\cdot\sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)\,du\,dz = \int_0^1 2z^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)^2\,du\,dz$$

$$= \int_0^1 2z^3 \left[\frac{1}{2}(u+\sin(u)\cos(u))\right]_{u=-\frac{\pi}{2}}^{u=\frac{\pi}{2}} dz = \int_0^1 2z^3\cdot\frac{\pi}{2}\,dz = \pi\int_0^1 z^3\,dz$$

$$= \pi\left[\frac{z^4}{4}\right]_{z=0}^{z=1} = \frac{\pi}{4}.$$

Somit hat der Schwerpunkt von B die Koordinaten $(x_s, y_s, z_s) = \left(\frac{0}{\frac{\pi}{3}}, \frac{0}{\frac{\pi}{3}}, \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{3}}\right) = \left(0, 0, \frac{3}{4}\right)$.

Aufgabe G41 (Massenberechnung mittels Integration)

Ein Landstück L ist 10 m × 10 m groß. Messungen haben ergeben, dass die Bodendichte in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ auf L durch die Funktion $\rho(x,y,z) = 10 + 0,3xy + 0,1yz + 0,2xz$ gegeben ist. Hierbei bezeichnen x, y horizontalen Koordinaten und z die Tiefe, jeweils in m.

Berechnen Sie die Masse der aus dem Boden zu hebenden Erde, wenn in die Mitte von L ein quadratisches Loch mit Seitenlänge 6 m und Tiefe 8 m gebohrt werden soll.

Lösung: Wir müssen ρ über $Q = [2;8]\times[2;8]\times[0,8]$ integrieren. Wir rechnen daher:

$$\begin{aligned}\int_H \rho(x,y,z)\,d(x,y,z) &= \int_0^8 \int_2^8 \int_2^8 (10 + 0,3xy + 0,1yz + 0,2xz)\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_0^8 \int_2^8 \left[10x + 0,15x^2y + 0,1xyz + 0,1x^2z\right]_{x=2}^{x=8} dy\,dz \\ &= \int_0^8 \int_2^8 (60 + 9y + 0,6yz + 6z)\ dy\,dz \\ &= \int_0^8 \left[60y + 4,5y^2 + 0,3y^2z + 6yz\right]_{y=2}^{y=8} dz \\ &= \int_0^8 (360 + 270 + 18z + 36z)\ dz = \left[360z + 270z + 9z^2 + 18z^2\right]_{z=0}^{z=8} \\ &= 630\cdot 8 + 27\cdot 64 = 6768.\end{aligned}$$

Die gesuchte Masse beträgt also 6768 kg.

Aufgabe G42 (Kurvenintegrale)

(a) Berechnen Sie $\int_C v\cdot dx$ für die Vektorfelder $v:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ und Kurven $C = x:[a;b]\to\mathbb{R}^n$:

i. $v(x_1,x_2) = (3x_1 + 2x_2, 2x_1)^T$ und $x(t) = (\cos(t), -2\sin(t))^T$ mit $0\le t\le\frac{\pi}{2}$.

ii. $v(x_1,x_2,x_3) = (x_2x_3, -x_1x_3, e^{x_3})^T$ und $x(t) = (\cos(t),\sin(t),t)^T$ mit $0\le t\le\pi$.

(b) Lösen Sie das Kurvenintegral von (a) i. mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

Lösung:

(a) Wir erinnern uns an die Formel:

$$\int_C v \cdot dx = \int_a^b v(x(t)) \cdot x'(t)\, dt = \int_a^b \left\langle v(x(t)), x'(t) \right\rangle\, dt.$$

i.

$$\begin{aligned}
\int_C v \cdot dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 3\cos(t) - 4\sin(t) \\ 2\cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix} \right\rangle\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-3\sin(t)\cos(t) + 4\sin(t)^2 - 4\cos(t)^2\right)\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-3\sin(t)\cos(t) - 4\left(\cos(t)^2 - \sin(t)^2\right)\right)\, dt \\
&\overset{\cos(t)^2-\sin(t)^2=\cos(2t)}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-3\sin(t)\cos(t) - 4\cos(2t)\right)\, dt \\
&= \left[-\frac{3}{2}\sin(t)^2 - 2\sin(2t)\right]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = -\frac{3}{2} - 0 = -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

ii.

$$\begin{aligned}
\int_C v \cdot dx &= \int_0^{\pi} \left\langle \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ -t\cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle\, dt = \int_0^{\pi} \left(-t\sin(t)^2 - t\cos(t)^2 + e^t\right) dt \\
&= \int_0^{\pi} \left(-t + e^t\right) dt = \left[-\frac{1}{2}t^2 + e^t\right]_{t=0}^{t=\pi} = -\frac{\pi^2}{2} + e^{\pi} + \frac{1}{2} - 1 = -\frac{\pi^2}{2} + e^{\pi} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

(b) Das Vektorfeld

$$\begin{aligned}
v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ist konservativ / ein Gradientenvektorfeld, denn $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend und es gilt: $\frac{\partial}{\partial x_1} v_2 = 2 = \frac{\partial}{\partial x_2} v_1$ (Integrabilitätsbedingung). Dazu gehört das Potential / die Stammfunktion $f(x_1, x_2) = \frac{3x_1^2}{2} + 2x_1x_2$. Dies sieht man entweder mit bloßem Auge oder man geht folgendermaßen vor:
Wegen $\frac{\partial}{\partial x_1} f = v_1 = 3x_1 + 2x_2$ ist $f(x_1, x_2) = \int (3x_1 + 2x_2)\, dx_1 = \frac{3x_1^2}{2} + 2x_1x_2 + C_1(x_2)$ für eine (bezüglich x_1) Konstante $C_1(x_2)$, die noch von x_2 abhängen kann.
Wegen $\frac{\partial}{\partial x_2} f = v_2 = 2x_1$ ist $f(x_1, x_2) = \int 2x_1\, dx_2 = 2x_1x_2 + C_2(x_1)$ für eine (bezüglich x_2) Konstante $C_2(x_1)$, die noch von x_1 abhängen kann.
Wegen $\frac{3x_1^2}{2} + 2x_1x_2 + C_1(x_2) = f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + C_2(x_1)$ kann man $C_1(x_2) = 0$ und $C_2(x_1) = \frac{3x_1^2}{2}$ wählen, also $f(x_1, x_2) = \frac{3x_1^2}{2} + 2x_1x_2$.
Damit gilt nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale:

$$\int_C v \cdot dx = \int_C \nabla f \cdot dx = f\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - f(x(0)) = f(0, -2) - f(1, 0) = \frac{0}{2} + 0 - \frac{3}{2} - 0 = -\frac{3}{2}.$$

Hausübung

Beachten Sie, dass dies die letzten Hausübungen der Veranstaltung sind!

Aufgabe H34 (Integration im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten) (5 Punkte)

Sei $G = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2+y^2+z^2 \le 1 \right\}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel und der Funktion $g : (0;1) \times (0;2\pi) \times (0;\pi) \to \mathbb{R}^3, (r,\varphi,\gamma) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\gamma) \\ r\sin(\varphi)\sin(\gamma) \\ r\cos(\gamma) \end{pmatrix}$ die Integrale $I_1 = \int_G 1 \, d(x,y,z)$ und $I_2 = \int_G \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, d(x,y,z)$. Man nennt diese spezielle Transformation die *Transformation der Einheitskugel im* $\mathbb{R}^3$ *in Kugelkoordinaten.*

Lösung:

Um die Transformationsformel von Seite 141 im Skript zu benutzen, müssen wir erst den Betrag der Funktionaldeterminate berechnen:

$$\begin{aligned}
|\det \mathcal{J}_g(r,\varphi,\gamma)| &= \left| \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\gamma) & -r\sin(\varphi)\sin(\gamma) & r\cos(\varphi)\cos(\gamma) \\ \sin(\varphi)\sin(\gamma) & r\cos(\varphi)\sin(\gamma) & r\sin(\varphi)\cos(\gamma) \\ \cos(\gamma) & 0 & -r\sin(\gamma) \end{pmatrix} \right| \\
&= \left| \cos(\gamma) \cdot \det \begin{pmatrix} -r\sin(\varphi)\sin(\gamma) & r\cos(\varphi)\cos(\gamma) \\ r\cos(\varphi)\sin(\gamma) & r\sin(\varphi)\cos(\gamma) \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. -r\sin(\gamma) \cdot \det \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\sin(\gamma) & -r\sin(\varphi)\sin(\gamma) \\ \sin(\varphi)\sin(\gamma) & r\cos(\varphi)\sin(\gamma) \end{pmatrix} \right| \\
&= \big| \cos(\gamma) \cdot r^2(-\sin(\varphi)^2\sin(\gamma)\cos(\gamma) - \cos(\varphi)^2\sin(\gamma)\cos(\gamma)) \\
&\quad -r\sin(\gamma) \cdot r(\cos(\varphi)^2\sin(\gamma)^2 + \sin(\varphi)^2\sin(\gamma)^2) \big| \\
&= r^2 \left| \cos(\gamma) \cdot (-\sin(\gamma)\cos(\gamma)) - \sin(\gamma) \cdot \sin(\gamma)^2 \right| \\
&= r^2 \left| -\sin(\gamma) \left(\cos(\gamma)^2 + \sin(\gamma)^2 \right) \right| = r^2 |-\sin(\gamma)| = r^2 \sin(\gamma).
\end{aligned}$$

Beachten Sie, dass die letzte Gleichung gilt, weil $\sin(\gamma) \ge 0$ für $0 \le \gamma \le \pi$. Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_G 1 \, d(x,y,z) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot r^2 \sin(\gamma) \, d\gamma \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) \, d\varphi \, dr \\
&= \int_0^1 r^2 \int_0^{2\pi} 2 \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^2 \cdot (2 \cdot 2\pi - 2 \cdot 0) \, dr = \int_0^1 4\pi r^2 \, dr = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{3} - 0 \right) = \frac{4\pi}{3}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_G \sqrt{x^2+y^2+z^2} \, d(x,y,z) \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{r^2\cos(\varphi)^2\sin(\gamma)^2 + r^2\sin(\varphi)^2\sin(\gamma)^2 + r^2\cos(\gamma)^2} \cdot r^2 \sin(\gamma) \, d\gamma \, d\varphi \, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{(\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2)\sin(\gamma)^2 + \cos(\gamma)^2} \cdot r \cdot r^2 \sin(\gamma) \, d\gamma \, d\varphi \, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{\sin(\gamma)^2 + \cos(\gamma)^2} \cdot r^3 \sin(\gamma) \, d\gamma \, d\varphi \, dr \\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^3 \sin(\gamma) \, d\gamma \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin(\gamma) \, d\gamma \, d\varphi \, dr \\
&= \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} (-\cos(\pi) - (-\cos(0))) \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^3 \int_0^{2\pi} 2 \, d\varphi \, dr = \int_0^1 r^3 \cdot (2 \cdot 2\pi - 2 \cdot 0) \, dr \\
&= \int_0^1 4\pi r^3 \, dr = 4\pi \cdot \left(\frac{1}{4} - 0 \right) = \pi.
\end{aligned}$$

Aufgabe H35 (Schwerpunktberechnung mittels Integration) (4+1=5 Punkte)

Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ aus Aufgabe H33. Wie erhält man den Schwerpunkt des Körpers $\mathcal{H}$, den man bekommt, wenn man H um die y-Achse rotieren lässt?

Lösung: Wir wissen von Aufgabe H33, dass gilt: $\int_H 1\, d(x,y) = 3\pi$. Wir rechnen nun:

$$\begin{aligned}
\int_H x\, d(x,y) &= \int_{H_1} x\, d(x,y) + \int_{H_2} x\, d(x,y) + \int_{H_3} x\, d(x,y)\\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} x\, dy\, dx + \int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{1-(x+1)^2}} x\, dy\, dx + \int_{-\pi}^0 \int_{-\cos(y)-1}^{\cos(y)+1} x\, dx\, dy\\
&= \int_0^2 x\sqrt{1-(x-1)^2}\, dx + \int_{-2}^0 x\sqrt{1-(x+1)^2}\, dx\\
&+ \int_{-\pi}^0 \frac{1}{2}\left((\cos(y)+1)^2 - (-\cos(y)-1)^2\right)\, dy\\
&\underset{du=dx}{\overset{u=x-2}{=}} \int_{-2}^0 (u+2)\sqrt{1-(u+1)^2}\, du + \int_{-2}^0 x\sqrt{1-(x+1)^2}\, dx + \int_{-\pi}^0 0\, dy\\
&= \int_{-2}^0 (x+2)\sqrt{1-(x+1)^2}\, dx + \int_{-2}^0 x\sqrt{1-(x+1)^2}\, dx = \int_{-2}^0 (2x+2)\sqrt{1-(x+1)^2}\, dx\\
&\underset{du=2(x+1)dx}{\overset{u=(x+1)^2}{=}} \int_1^1 \sqrt{1-u}\, du = 0.
\end{aligned}$$

Man kann sich diese Rechnung auch sparen, wenn man argumentiert, das der Schwerpunkt von H die x-Koordinate 0 haben muss, da H achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Jetzt rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_H y\, d(x,y) &= \int_{H_1} y\, d(x,y) + \int_{H_2} y\, d(x,y) + \int_{H_3} y\, d(x,y)\\
&= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} y\, dy\, dx + \int_{-2}^0 \int_0^{\sqrt{1-(x+1)^2}} y\, dy\, dx + \int_{-\pi}^0 \int_{-\cos(y)-1}^{\cos(y)+1} y\, dx\, dy\\
&= \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}} dx + \int_{-2}^0 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x+1)^2}} dx\\
&+ \int_{-\pi}^0 \left(y\cos(y) + y + y\cos(y) + y\right)\, dy\\
&= \int_0^2 \frac{1-(x-1)^2}{2}\, dx + \int_{-2}^0 \frac{1-(x+1)^2}{2}\, dx + \int_{-\pi}^0 2y\, dy + \int_{-\pi}^0 2y\cos(y)\, dy\\
&\underset{du=dx}{\overset{u=x-2}{=}} \int_{-2}^0 \frac{1-(u+1)^2}{2}\, du + \int_{-2}^0 \frac{1-(x+1)^2}{2}\, dx\\
&+ \left[y^2\right]_{y=-\pi}^{y=0} + \left[2y\sin(y)\right]_{y=-\pi}^{y=0} - \int_{y=-\pi}^{y=0} 2\sin(y)\, dy\\
&= \int_{-2}^0 \frac{1-(x+1)^2}{2}\, dx + \int_{-2}^0 \frac{1-(x+1)^2}{2}\, dx - \pi^2 + 0 + (2\cos(0) - 2\cos(-\pi))\\
&= \int_{-2}^0 \frac{1-(x+1)^2+1-(x+1)^2}{2}\, dx - \pi^2 + 4 = \int_{-2}^0 \left(-x^2-2x\right)\, dx - \pi^2 + 4\\
&= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2\right]_{x=-2}^{x=0} - \pi^2 + 4 = 0 - \left(\frac{8}{3} - 4\right) - \pi^2 + 4 = \frac{16}{3} - \pi^2.
\end{aligned}$$

Somit hat der Schwerpunkt von H die Koordinaten $(x_s, y_s) = \left(\frac{0}{3\pi}, \frac{\frac{16}{3}-\pi^2}{3\pi}\right) = (0, -0,4813...)$.
Der Schwerpunkt von $\mathcal{H}$ ist $(0, -0,4813..., 0)$, da $\mathcal{H}$ rotationssymmetrisch zur y-Achse ist.

Aufgabe H36 (Kurvenintegrale) (3+2=5 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\int_C v \cdot dx$ für die Vektorfelder $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und Kurven $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:

i. $v(x_1, x_2) = (x_2 \cos(x_1 x_2), x_1 \cos(x_1 x_2))^T$ und $x(t) = (t, 1)^T$ mit $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

ii. $v(x_1, x_2, x_3) = \left(x_2 \ln(x_3), -x_1 \ln(x_3), \frac{x_2}{x_3}\right)^T$ und $x(t) = (t, t^2, e^t)^T$ mit $0 \le t \le 1$.

(b) Lösen Sie das Kurvenintegral von (a) i. mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

Lösung:

(a) Wir erinnern uns an die Formel:

$$\int_C v \cdot dx = \int_a^b v(x(t)) \cdot x'(t)\, dt = \int_a^b \left\langle v(x(t)), x'(t) \right\rangle\, dt.$$

i.

$$\int_C v \cdot dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \cdot \cos(t) \\ t \cdot \cos(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t) + 0)\, dt = [\sin(t)]_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}} = 1.$$

ii.

$$\int_C v \cdot dx = \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \\ \frac{t^2}{e^t} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ e^t \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 \left(-t^3 + t^2\right)\, dt = \left[\frac{-t^4}{4} + \frac{t^3}{3}\right]_{t=0}^{t=1}$$
$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

(b) Das Vektorfeld

$$v : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cos(x_1 x_2) \\ x_1 \cos(x_1 x_2) \end{pmatrix}$$

ist konservativ / ein Gradientenvektorfeld, denn $\mathbb{R}^2$ ist einfach zusammenhängend und es gilt: $\frac{\partial}{\partial x_1} v_2 = \cos(x_1 x_2) - x_1 x_2 \sin(x_1 x_2) = \frac{\partial}{\partial x_2} v_1$ (Integrabilitätsbedingung). Dazu gehört das Potential / die Stammfunktion $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)$. Dies sieht man entweder mit bloßem Auge oder man geht folgendermaßen vor:
Wegen $\frac{\partial}{\partial x_1} f = v_1 = x_2 \cos(x_1 x_2)$ ist $f(x_1, x_2) = \int x_2 \cos(x_1 x_2)\, dx_1 = \sin(x_1 x_2) + C_1(x_2)$ für eine (bezüglich x_1) Konstante $C_1(x_2)$, die noch von x_2 abhängen kann.
Wegen $\frac{\partial}{\partial x_2} f = v_2 = x_1 \cos(x_1 x_2)$ ist $f(x_1, x_2) = \int x_1 \cos(x_1 x_2)\, dx_2 = \sin(x_1 x_2) + C_2(x_1)$ für eine (bezüglich x_2) Konstante $C_2(x_1)$, die noch von x_1 abhängen kann.
Wegen $\sin(x_1 x_2) + C_1(x_2) = f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2) + C_2(x_1)$ kann man $C_1(x_2) = 0 = C_2(x_1)$ wählen (aber auch $C_1(x_2) = c = C_2(x_1)$ für jedes andere $c \in \mathbb{R}$), also $f(x_1, x_2) = \sin(x_1 x_2)$.
Damit gilt nach dem Hauptsatz für Kurvenintegrale:

$$\int_C v \cdot dx = \int_C \nabla f \cdot dx = f\left(x\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - f(x(0)) = f\left(\frac{\pi}{2}, 1\right) - f(0, 1) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1.$$