Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
12./13./16. Juni

11. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G36 (Multiple Choice)

(a) ☒ Der Gradient ist für Skalarenfelder definiert.
☐ Der Gradient ist für Vektorfelder definiert.
☐ Die Rotation ist für Skalarenfelder definiert.
☒ Die Rotation ist für Vektorfelder definiert.
☐ Die Divergenz ist für Skalarenfelder definiert.
☒ Die Divergenz ist für Vektorfelder definiert.
☒ Der Laplace-Operator ist für Skalarenfelder definiert.
☐ Der Laplace-Operator ist für Vektorfelder definiert.

(b) ☒ Stetige Funktionen sind auf kompakten Intervallen integrierbar.
☐ Stetige Funktionen sind immer integrierbar.
☐ Die Transformationsformel im $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_B f(g(u,v)) \cdot \det \mathcal{J}_g(u,v)\,d(u,v)$$

für $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, stetiges $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to A$ stetig differenzierbar und bijektiv.

☒ Die Transformationsformel im $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_B f(g(u,v)) \cdot |\det \mathcal{J}_g(u,v)|\,d(u,v)$$

für $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, stetiges $f : A \to \mathbb{R}$ und $g : B \to A$ stetig differenzierbar und bijektiv.

Lösung:

(a) Siehe Seiten 127 ff. im Skript.

(b) (i) Siehe Satz 8.1 auf Seite 130 im Skript.
(ii) Das Integral $\int_{\mathbb{R}} x^2\,dx$ existiert nicht, da es beliebig groß wäre. (Unendlich ist nicht als Wert eines Integrals zugelassen.)
(iii) + (iv) Siehe Seite 141 im Skript.

Aufgabe G37 (Jacobi-Matrizen und Kettenregel)

(a) Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die Jacobi-Matrix:

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_1(x,y) = (2xy - y^2, \sin(x) + y, \cos(xy))^T,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f_2(x,y,z) = (x^2 z - yz^3, \ln(xyz))^T, \quad f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f_3(w,x,y,z) = xy \cdot e^{wxyz}.$$

(b) Was ist der Unterschied zwischen dem Gradienten und der Jacobi-Matrix einer Funktion?

(c) Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - xy, x + y^3)^T$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(z) = (z,z)^T$. Bestimmen Sie $\mathcal{J}_{(f\circ g)}(7)$ auf zwei Arten und Weisen: einmal direkt, indem sie $(f \circ g)$ bilden und dann die partiellen Ableitungen berechnen und einmal mit Hilfe der Kettenregel:

$$\mathcal{J}_{(f\circ g)}(z) = \mathcal{J}_f(g(z)) \cdot \mathcal{J}_g(z).$$

Lösung:

(a) Wir bilden alle partiellen Ableitungen aller Teilfunktionen und schreiben Sie an die richtigen Stellen der Jacobi-Matrizen:

$$\mathcal{J}_{f_1} = \begin{pmatrix} 2y & 2x - 2y \\ \cos(x) & 1 \\ -y\sin(xy) & -x\sin(xy) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_{f_2} = \begin{pmatrix} 2xz & -z^3 & x^2 - 3yz^2 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{pmatrix},$$
$$\mathcal{J}_{f_3} = \left(x^2y^2z \cdot e^{wxyz}, \quad (y + wxy^2z) \cdot e^{wxyz}, \quad (x + wx^2yz) \cdot e^{wxyz}, \quad wx^2y^2 \cdot e^{wxyz}\right).$$

(b) Der Gradient kann nur von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gebildet werden, die Jacobi-Matrix von Funktionen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ für *alle* $m \in \mathbb{N}$. Hat man eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so ist ∇f einfach nur die Transponierte von $\mathcal{J}_f$.

(c) Wir bestimmen direkt: $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $z \mapsto (z^2 - z \cdot z, z + z^3)^T = (0, z + z^3)^T$. Deswegen ist

$$\mathcal{J}_{(f\circ g)}(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 + 3z^2 \end{pmatrix}, \text{ also } \mathcal{J}_{(f\circ g)}(7) = \begin{pmatrix} 0 \\ 148 \end{pmatrix}.$$

Alternativ berechnen wir zunächst die Jacobi-Matrizen von f und g:

$$\mathcal{J}_f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x - y & -x \\ 1 & 3y^2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_g(z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach der Kettenregel gilt:

$$\mathcal{J}_{(f\circ g)}(7) = \mathcal{J}_f(g(7)) \cdot \mathcal{J}_g(7) = \mathcal{J}_f(7,7) \cdot \mathcal{J}_g(7) = \begin{pmatrix} 7 & -7 \\ 1 & 147 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 148 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G38 (grad, div, rot, Δ)

Wir wiederholen kurz einige Begrifflichkeiten. Seien dafür $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))^T$. Dann definieren wir:

- Der *Gradient von* f ist $\operatorname{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- Die *Divergenz von* v ist $\operatorname{div} v = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Die *Rotation von* v ist $\operatorname{rot} v = (\partial_y v_3 - \partial_z v_2, \quad \partial_z v_1 - \partial_x v_3, \quad \partial_x v_2 - \partial_y v_1)^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- *Laplace von* f ist $\Delta f = \partial_x\partial_x f + \partial_y\partial_y f + \partial_z\partial_z f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Nun wollen wir einige Rechenregeln mit diesen Symbolen zeigen.

(a) Für $\operatorname{div} v$ schreibt man oft auch $\nabla \cdot v$. Begründen Sie dies, indem Sie $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ schreiben und $\cdot$ als Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ lesen.

(b) Für $\operatorname{rot} v$ schreibt man oft auch $\nabla \times v$. Begründen Sie dies, indem Sie $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ schreiben und $\times$ als Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ lesen.

(c) Zeigen Sie, dass gilt: $\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \in \mathbb{R}^3$.

(d) Zeigen Sie, dass gilt: $\nabla \cdot (\nabla \times v) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0 \in \mathbb{R}$.

(e) Zeigen Sie, dass gilt: $\nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$. Daher schreibt man manchmal: $\nabla^2 = \Delta$.

Lösung:

(a) Das Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist die Summe der Produkte der einzelnen Komponenten:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \right\rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Daher erhalten wir:

$$\nabla \cdot v = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 = \operatorname{div} v.$$

(b) Das Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ ist folgendermaßen definiert:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}.$$

Daher erhalten wir:

$$\nabla \times v = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} = \operatorname{rot} v.$$

(c) Wir rechnen:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_y \partial_z f - \partial_z \partial_y f \\ \partial_z \partial_x f - \partial_x \partial_z f \\ \partial_x \partial_y f - \partial_y \partial_x f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Einträge verschwinden alle nach dem Satz von Schwarz.

(d) Wir rechnen:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times v) &= \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_y v_3 - \partial_z v_2 \\ \partial_z v_1 - \partial_x v_3 \\ \partial_x v_2 - \partial_y v_1 \end{pmatrix} \\ &= \partial_x \partial_y v_3 - \partial_x \partial_z v_2 + \partial_y \partial_z v_1 - \partial_y \partial_x v_3 + \partial_z \partial_x v_2 - \partial_z \partial_y v_1 = 0. \end{aligned}$$

(e) Wir rechnen:

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_x f \\ \partial_y f \\ \partial_z f \end{pmatrix} = \partial_x \partial_x f + \partial_y \partial_y f + \partial_z \partial_z f = \Delta f.$$

Aufgabe G39 (Integration über Normalbereiche, Transformationsformel, Polarkoordinaten)

(a) Sei $N = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \text{ und } -1 \leq y \leq 1 \right\}$.

i. Skizzieren Sie N. Um welchen Typ Normalbereich handelt es sich hier?

ii. Berechnen Sie $\int_N 2xy \, d(x,y)$.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \, d(x,y)$$

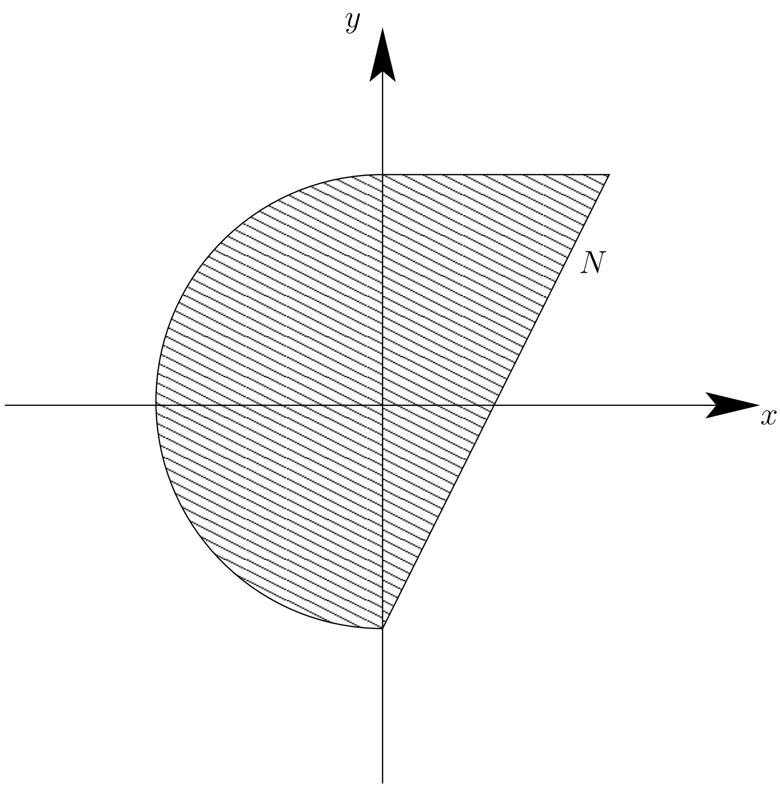
mit Hilfe der Transformationsformel und der Funktion

$$g : \mathbb{R}_{>0} \times (0; 2\pi) \to \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Man nennt diese spezielle Transformation die *Transformation in Polarkoordinaten des* $\mathbb{R}^2$.

Lösung:

(a) i.



N ist ein Normalbereich vom Typ II.

ii. Wir rechnen:

$$\int_N 2xy\, d(x,y) = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\frac{y}{2}+\frac{1}{2}} 2xy\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[x^2 y\right]_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=\frac{y}{2}+\frac{1}{2}} dy$$
$$= \int_{-1}^{1}\left(\left(\frac{y}{2}+\frac{1}{2}\right)^2 y - (1-y^2)y\right) dy = \int_{-1}^{1}\left(\frac{y^3}{4}+\frac{y^2}{2}+\frac{y}{4}-y+y^3\right) dy$$
$$= \left[\frac{y^4}{16}+\frac{y^3}{6}+\frac{y^2}{8}-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{4}\right]_{y=-1}^{y=1} = \frac{1}{6}-\frac{-1}{6} = \frac{1}{3}.$$

(b) Um die Transformationsformel von Seite 141 im Skript zu benutzen, müssen wir erst den Betrag der Funktionaldeterminate berechnen:

$$|\det \mathcal{J}_g(r,\varphi)| = \left|\det\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}\right| = \left|r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2\right| = |r| = r.$$

Nun rechnen wir:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2}\, d(x,y) = \int_{\mathbb{R}_{>0}\times(0;2\pi)} \frac{e^{-\frac{1}{r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2}}}{(r^2\cos(\varphi)^2+r^2\sin(\varphi)^2)^2}\cdot r\, d(r,\varphi)$$
$$= \int_{\mathbb{R}_{>0}}\int_{(0;2\pi)} \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot r\, d\varphi\, dr = \int_0^\infty\left(\int_0^{2\pi}\frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot r\, d\varphi\right) dr$$
$$= \int_0^\infty 2\pi\cdot\frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot r\, dr = \pi\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^4}\cdot 2r\, dr$$
$$\underset{dt=2r dr}{\overset{t=r^2}{=}} \pi\int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^2}\, dt \underset{ds=-\frac{1}{t^2}dt}{\overset{s=\frac{1}{t}}{=}} \pi\int_\infty^0 -e^{-s}\, ds = \pi\int_0^\infty e^{-s}\, ds$$
$$= \pi\cdot\lim_{R\to\infty}\left[-e^{-s}\right]_{s=0}^{s=R} = \pi\cdot\left(\lim_{R\to\infty} -e^{-R} - (-e^0)\right) = \pi\cdot(0+1) = \pi.$$

Hausübung

Aufgabe H31 (Jacobi-Matrizen und Kettenregel) (3+2=5 Punkte)

Seien $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $(w,x,y)\mapsto wx - xy + wy$ und $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$, $z\mapsto (z,-z,z^3)^T$.
Bestimmen Sie jeweils auf zwei Arten und Weisen:

(a) $(f\circ g)'(1) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(1)$.

(b) $\mathcal{J}_{(g\circ f)}(1,2,0)$.

Lösung: Wir berechnen zunächst die Jacobi-Matrizen von f und g:

$$\mathcal{J}_f(w,x,y) = \begin{pmatrix}x+y, & w-y, & -x+w\end{pmatrix}, \quad \mathcal{J}_g(z) = \begin{pmatrix}1\\-1\\3z^2\end{pmatrix}.$$

(a) Nach der Kettenregel gilt:

$$(f\circ g)'(1) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(1) = \mathcal{J}_f(g(1))\cdot\mathcal{J}_g(1) = \mathcal{J}_f(1,-1,1)\cdot\mathcal{J}_g(1)$$
$$= \begin{pmatrix}0 & 0 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix} = 0\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 2\cdot 3 = 6.$$

Alternativ bestimmen wir direkt: $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $z \mapsto -z^2 + 2z^4$. Deswegen ist

$$(f \circ g)'(z) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(z) = -2z + 8z^3, \text{ also } (f \circ g)'(1) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(1) = -2 + 8 = 6.$$

(b) Nach der Kettenregel gilt:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{(g\circ f)}(1,2,0) &= \mathcal{J}_g(f(1,2,0)) \cdot \mathcal{J}_f(1,2,0) = \mathcal{J}_g(2) \cdot \mathcal{J}_f(1,2,0) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 24 & 12 & -12 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Alternativ bestimmen wir direkt:

$$\begin{aligned} g \circ f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} wx - xy + wy \\ -wx + xy - wy \\ (wx - xy + wy)^3 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Deswegen ist $\mathcal{J}_{(g\circ f)}(w,x,y) =$

$$\begin{pmatrix} x + y, & w - y, & -x + w \\ -x - y, & -w + y, & x - w \\ 3(wx - xy + wy)^2(x+y) & 3(wx - xy + wy)^2(w-y) & 3(wx - xy + wy)^2(-x+w) \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathcal{J}_{(g\circ f)}(1,2,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 \cdot 2^2 \cdot 2 & 3 \cdot 2^2 \cdot 1 & 3 \cdot 2^2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 24 & 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H32 (Integration im $\mathbb{R}^2$) (3+2=5 Punkte)

(a) Sei $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x \le 2 \text{ und } 3 \le y \le 5\}$ und $f(x,y) = \cos(2\pi x)e^{3y}$.

i. Warum existiert das Integral $\int_I f(x,y)d(x,y)$?

ii. Berechnen Sie $\int_1^2 \int_3^5 f(x,y)\,dy\,dx$ und $\int_3^5 \int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy$.

(b) Berechnen Sie

$$\frac{d}{dx} \int_x^{2x^3} \ln(xy^2)\,dy.$$

Lösung:

(a) i. Die Menge I ist ein kompaktes Intervall, f ist stetig auf I, also existiert das Integral.

ii. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left[\int_3^5 \cos(2\pi x)e^{3y}\,dy\right] dx &= \int_1^2 \cos(2\pi x) \left[\frac{1}{3}e^{3y}\right]_{y=3}^{y=5} dx \\ &= \frac{1}{3}(e^{15} - e^9) \int_1^2 \cos(2\pi x)\,dx \\ &= \frac{1}{3}(e^{15} - e^9) \left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_{x=1}^{x=2} = 0\end{aligned}$$

und

$$\int_3^5 \left[\int_1^2 \cos(2\pi x)e^{3y}\,dx\right] dy = \int_3^5 e^{3y}\left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)\right]_{x=1}^{x=2} dy = \int_3^5 e^{3y}\cdot 0\,dy = 0.$$

Die zweite Rechnung kann man sich auch sparen, da nach dem Satz von Fubini gilt: $\int_3^5\int_1^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2\int_3^5 f(x,y)\,dy\,dx$.

(b) Wir benutzen die Formel von Seite 131 im Skript:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\int_x^{2x^3}\ln(xy^2)\,dy &= \int_x^{2x^3}\left(\partial_x \ln(xy^2)\right)\,dy + \ln(x(2x^3)^2)\cdot 6x^2 - \ln(xx^2)\cdot 1\\ &= \int_x^{2x^3}\frac{1}{x}\,dy + \ln(4x^7)\cdot 6x^2 - \ln(x^3)\\ &= \frac{2x^3}{x} - \frac{x}{x} + (\ln(4)+7\ln(x))\cdot 6x^2 - 3\ln(x)\\ &= 2x^2 - 1 + (\ln(4)+7\ln(x))\cdot 6x^2 - 3\ln(x).\end{aligned}$$

Aufgabe H33 (Flächeninhalt- und Volumenbestimmung) (3+2=5 Punkte)

(a) Es seien:

$$\begin{aligned}H_1 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0\le x\le 2 \text{ und } 0\le y\le\sqrt{1-(x-1)^2}\right\}\\ H_2 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -2\le x\le 0 \text{ und } 0\le y\le\sqrt{1-(x+1)^2}\right\}\\ H_3 &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, -\cos(y)-1\le x\le \cos(y)+1 \text{ und } -\pi\le y\le 0\right\}.\end{aligned}$$

i. Skizzieren Sie H_1, H_2 und H_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

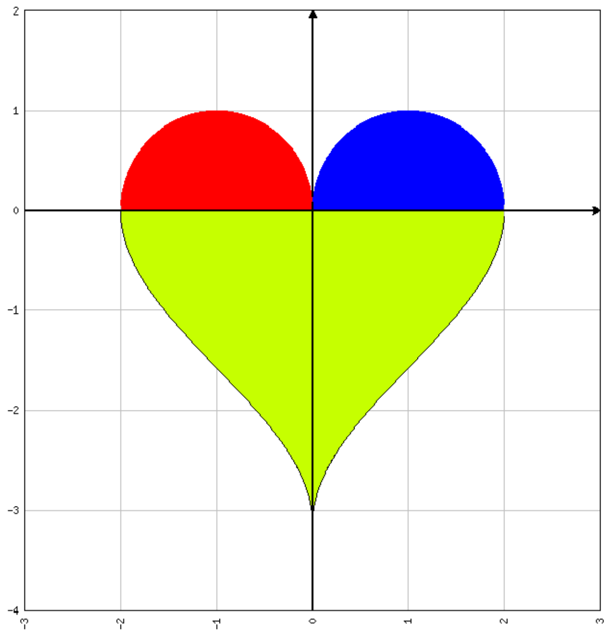
ii. Sei $H = H_1\cup H_2\cup H_3$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von H als Integral $\int_H 1\,d(x,y)$. *Hinweis:* Sie können benutzen, dass gilt: $\int \cos(t)^2\,dt = \frac{1}{2}(t+\sin(t)\cos(t))$.

(b) Berechnen Sie das Volumen der oberen Einheits-Halbkugel im $\mathbb{R}^3$, indem Sie die Funktion $f(x,y)=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$ über die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2+y^2<1\right\}$ integrieren. *Hinweis:* Benutzen Sie auf $\mathbb{D}^2$ eine Transformation in Polarkoordinaten mit

$$g:(0;1)\times(0;2\pi)\to\mathbb{R}^2,(r,\varphi)\mapsto\begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\\ r\sin(\varphi)\end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) i. Die blaue Fläche ist H_1, die rote H_2 und die grüne H_3:



ii. Es ist $\int_H 1\,d(x,y) = \int_{H_1} 1\,d(x,y) + \int_{H_2} 1\,d(x,y) + \int_{H_3} 1\,d(x,y)$. Wir rechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{H_1} 1\,d(x,y) &= \int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} 1\,dy\,dx = \int_0^2 [y]_{y=0}^{y=\sqrt{1-(x-1)^2}}\,dx \\
&= \int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx \underset{dx=\cos(t)dt}{\overset{x=1+\sin(t)}{=}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1-\sin(t)^2}\cdot\cos(t)\,dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(t)^2\,dt = \left[\frac{1}{2}(t+\sin(t)\cos(t))\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen gilt: $\int_{H_2} 1\,d(x,y) = \int_{H_1} 1\,d(x,y) = \frac{\pi}{2}$. Man kann aber auch $\int_{H_2} 1\,d(x,y)$ explizit wie oben ausrechnen. Schließlich rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_{H_3} 1\,d(x,y) &= \int_{-\pi}^0 \int_{-\cos(y)-1}^{\cos(y)+1} 1\,dx\,dy = \int_{-\pi}^0 (2\cos(y)+2)\,dy = [-2\sin(y)+2y]_{y=-\pi}^{y=0} \\
&= 0-(-2\pi) = 2\pi.
\end{aligned}$$

Also ist der Flächeninhalt des Herzes $\int_H 1\,d(x,y) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 2\pi = 3\pi$.

(b) Wir wissen schon aus G39 (b), dass $|\det \mathcal{J}_g(r,\varphi)| = r$ gilt. Nun rechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}^2} \sqrt{1-(x^2+y^2)}\,d(x,y) &= \int_{(0;1)\times(0;2\pi)} \sqrt{1-(r^2\cos(\varphi)^2 + r^2\cos(\varphi)^2)}\cdot r\,d(r,\varphi) \\
&= \int_{(0;1)\times(0;2\pi)} \sqrt{1-r^2}\cdot r\,d(r,\varphi) \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{2\pi} \sqrt{1-r^2}\cdot r\,d\varphi\right) dr = \pi \int_0^1 \sqrt{1-r^2}\cdot 2r\,dr \\
&\underset{dt=-2rdr}{\overset{t=1-r^2}{=}} \pi \int_1^0 -t^{\frac{1}{2}}\,dt = \pi\left[-\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_{t=1}^{t=0} = \pi\cdot\left(0-\left(-\frac{2}{3}\right)\right) \\
&= \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$