Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
5./6./9. Juni

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo"

Gruppenübung

Aufgabe G32 (Multiple Choice)

Welche Behauptungen sind für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ immer gültig?

(a) ☒ Wenn f in a total differenzierbar ist, dann ist f in a auch stetig.

☐ Wenn f in a stetig ist, dann ist f in a auch total differenzierbar.

☐ Wenn f in a partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch total differenzierbar.

☐ Wenn f in a partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch stetig.

☒ Wenn f in a stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch total differenzierbar.

☒ Wenn f in a stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch stetig.

(b) Sei f nun zweimal stetig partiell differenzierbar.

☐ Wenn f in a ein lokales Maximum hat, so ist $\nabla f(a) = 0$ und $\mathrm{H}_f(a)$ negativ definit.

☒ Wenn $\nabla f(a) = 0$ und $\mathrm{H}_f(a)$ negativ definit ist, dann hat f in a ein lokales Maximum.

☒ Wenn f in a ein globales Maximum hat, so ist $\nabla f(a) = 0$.

☒ Die Matrix $\mathrm{H}_f(a)$ ist symmetrisch.

Lösung:

(a) (i) Dies ist die Aussage von Satz 7.3 a).
(ii) Als Gegenbeispiel dient hier die Betragsfunktion $f(x) = |x|$.
(iii) + (iv) Als Gegenbeispiel dient hier die Funktion aus G26 b):

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(v) Dies ist die Aussage von Satz 7.4.
(vi) Ergibt sich aus (v) und (i).

(b) (i) Die negative Definitheit der Hesse-Matrix ist nicht notwendig: So hat zum Beispiel die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x^4$ an der Stelle 0 mit 0 eine Hesse-Matrix, die nicht negativ definitiv ist, aber dennoch ist 0 ein Maximum von f.
(ii) Dies ist die Aussage von Satz 7.11 b).
(iii) Dies ist die Aussage von Satz 7.10.
(iv) Dies ist eine Folge des Satzes von Schwarz.

Aufgabe G33 (Richtungsableitung)

Für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist die *Richtungsableitung* $\partial_v f(a)$ die Steigung von der in Richtung v eingeschränkten Funktion f in a:

$$\partial_v f(a) = \frac{d}{dt} f(a + tv)\Big|_{t=0}, \text{ das heißt: } \partial_v f(a) = g'(0) \text{ mit } g(t) = f(a + tv). \tag{1}$$

Man kann beweisen, dass die Richtungsableitung auch durch folgende Formel gegeben ist:

$$\partial_v f(a) = \langle \nabla f(a), v\rangle = \nabla f(a)^T \cdot v. \tag{2}$$

Seien nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^2 \cdot (x - y) + \sqrt{2}x$ und $a = (0, 1)^T$ und $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

(a) Berechnen Sie $\partial_v f(a)$ mithilfe der Definition (1).

(b) Berechnen Sie $\partial_v f(a)$ mithilfe der Formel (2).

Lösung:

(a) Wir bilden $g(t) = f(a + tv) = f\left((0, 1) + t \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)\right) = f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, 1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = t^2 \cdot (-1) + \frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{2}} = -t^2 + t$, also ist $\partial_v f(a) = g'(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1$.

(b) Der Gradient von f lautet allgemein: $\nabla f(x, y) = (f_x, f_y) = (6x^2 - 4xy + \sqrt{2}, -2x^2)$. Also gilt: $\nabla f(a) = \nabla f(0, 1) = (\sqrt{2}, 0)$, somit ist $\partial_v f(a) = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$.

Aufgabe G34 (Implizit gegebene Funktionen und Extrema unter Nebenbedingungen)

(a) Welche von x abhängige Funktion $y = h(x)$ wird durch die Gleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ an der Stelle $(0, 1)$ implizit gegeben? Berechnen Sie dann einmal direkt $h'(0)$ und einmal mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion.

(b) Gegeben sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(\pi(x+1)y) + (x+1)^2 y$. Warum wird durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ an der Stelle $(0, 0)$ eine Funktion $y = h(x)$ gegeben? Berechnen Sie $h'(0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x^2 + 6y^2 - 4 = 0$.

Lösung:

(a) Die Gleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ beschreibt die Einheitskreislinie im $\mathbb{R}^2$ und die Funktion, dessen Graph auf der Einheitskreislinie liegt und durch $(0, 1)$ verläuft, lautet wie folgt: $h : [-1; 1] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$. Deswegen ist $h'(0) = -2 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-0^2}} = 0$. Außerdem können wir $h'(0)$ mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion berechnen: $h'(0) = -\frac{g_x(0,1)}{g_y(0,1)} = -\frac{2\cdot 0}{2\cdot 1} = 0$.

(b) Es ist $g_y(0, 0) = \pi \cdot (0 + 1) \cdot \cos(\pi(0 + 1) \cdot 0) + (0 + 1)^2 = \pi + 1 \neq 0$. Also ist die Bedingung des Satzes über die implizite Funktion erfüllt und es wird durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ an der Stelle $(0, 0)$ eine Funktion $y = h(x)$ gegeben. Der Satz liefert auch eine Formel für die Ableitung: $h'(0) = -\frac{g_x(0,0)}{g_y(0,0)} = -\frac{\pi\cdot 0\cdot\cos(\pi\cdot(0+1)0)+2\cdot(0+1)\cdot 0}{\pi+1} = 0$.

(c) Wir gehen nach Lagrange vor (siehe Seite 121 ff. im Skript): Wir definieren eine Funktion L über $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy^2 + \lambda(2x^2 + 6y^2 - 4)$ und leiten partiell ab:

$$\begin{aligned} L_x &= y^2 + 4\lambda x \overset{!}{=} 0, \\ L_y &= 2xy + 12\lambda y \overset{!}{=} 0, \\ L_\lambda &= 2x^2 + 6y^2 - 4 \overset{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Unser Ziel muss es sein, zunächst λ zu bestimmen und dann die Kandidaten für Extremstellen (x, y). Wir wollen die zweite Gleichung von (1) durch y teilen, um nach λ auflösen zu können, dafür betrachten wir den Fall $y = 0$ separat:

Sei also zunächst $y = 0$. Dann ergibt die dritte Gleichung von (1) sofort $x = \pm\sqrt{2}$ und die erste Gleichung von (1) liefert $\lambda = 0$. Also sind $(\sqrt{2}, 0)$ und $(-\sqrt{2}, 0)$ mögliche Extremstellen unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ und die Funktionswerte sind $f(\sqrt{2}, 0) = f(-\sqrt{2}, 0) = 0$.

Sei nun $y \neq 0$. Dann liefert die Division durch y aus der zweiten Gleichung von (1) die Gleichung $\lambda = -\frac{x}{6}$, und wir erhalten aus der ersten und dritten Gleichung von (1):

$$\begin{bmatrix} y^2 - \frac{2x^2}{3} = 0 \\ 2x^2 + 6y^2 - 4 = 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y^2 = \frac{2x^2}{3} \\ 2x^2 + 4x^2 = 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y^2 = \frac{2x^2}{3} \\ x^2 = \frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y^2 = \frac{4}{9} \\ x^2 = \frac{2}{3} \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} y = \pm\frac{2}{3} \\ x = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \end{bmatrix}$$

Wir erhalten also vier weitere Extremstellen-Kandidaten: $\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$. Diese sind auch, im Gegensatz zu $(\sqrt{2}, 0)$ und $(-\sqrt{2}, 0)$, tatsächlich die Extrema von g unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$, denn die Funktionswerte lauten wie folgt: $f\left(\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = f\left(\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4}{9} > 0$ und $f\left(-\frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = f\left(-\frac{2}{3}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{9} < 0$.

Aufgabe G35 (Taylor-Formel im Mehrdimensionalen)

Für eine $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylor-Formel:

$$f(a + v) = f(a) + \partial_v f(a) + \frac{(\partial_v)^2 f(a)}{2!} + \ldots + \frac{(\partial_v)^k f(a)}{k!} + R_{k+1}(a, v),$$

wobei $R_{k+1}(a, v)$ ein Restglied ist und die Summe davor das *k-te Taylor-Polynom von f an der Stelle a* heißt. Wir wollen nun diese Formel besser verstehen.

Wir wissen schon, was $\partial_v f(a)$ ist. Wenn nun $(\partial_v)^{i-1} f(x, y)$ für allgemeine x, y bekannt ist, erhält man $(\partial_v)^i f(x, y)$ folgendermaßen: Wir schreiben $h(x, y) := (\partial_v)^{i-1} f(x, y)$, dann ist $(\partial_v)^i f(x, y) = \partial_v h(x, y) = \langle \nabla h(x, y), v \rangle$. Seien nun wieder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^2 \cdot (x - y) + \sqrt{2}x$ und $a = (0, 1)^T$

(a) Berechnen Sie $f(a)$, $h_1(x, y) = \partial_v f(x, y)$ und $\partial_v f(a)$ für allgemeine (x, y) und $v = (w, z)^T$.

(b) Berechnen Sie $h_2(x, y) = \partial_v h_1(x, y) = (\partial_v)^2 f(x, y)$ und $(\partial_v)^2 f(a)$ und ferner $h_3(x, y) = \partial_v h_2(x, y) = (\partial_v)^3 f(x, y)$ und $(\partial_v)^2 f(a)$ für allgemeine (x, y) und $v = (w, z)^T$.

(c) Berechnen Sie das dritte Taylor-Polyom von f an der Stelle a.

Lösung:

(a) $f(a) = f(0, 1) = 0$, $\nabla f(x, y) = (6x^2 - 4xy + \sqrt{2}, -2x^2)^T$, $\nabla f(a) = (\sqrt{2}, 0)^T$, $h_1(x, y) = \partial_v f(x, y) = \left\langle (6x^2 - 4xy + \sqrt{2}, -2x^2)^T, (w, z)^T \right\rangle = 6x^2 w - 4xyw + \sqrt{2}w - 2x^2 z$, $\partial_v f(a) = \sqrt{2}w$.

(b) Es ist $h_2(x, y) = (\partial_v)^2 f(x, y) = \partial_v h_1(x, y) = \left\langle (12xw - 4yw - 4xz, -4xw)^T, (w, z)^T \right\rangle = 12xw^2 - 4yw^2 - 8xwz$, also ist $(\partial_v)^2 f(a) = -4w^2$. Ferner ist $h_3(x, y) = (\partial_v)^3 f(x, y) = \partial_v h_2(x, y) = \left\langle \nabla h_2(x, y)^T, (w, z)^T \right\rangle = \left\langle (12w^2 - 8wz, -4w^2)^T, (w, z)^T \right\rangle = 12w^3 - 8w^2 z - 4w^2 z = 12w^3 - 12w^2 z$, unabhängig von (x, y), also ist $(\partial_v)^3 f(a) = 12w^3 - 12w^2 z$.

(c)

$$\begin{aligned} T_3(f; a)(v) = T_3(f; a)(w, z) &= f(a) + \partial_v f(a) + \frac{(\partial_v)^2 f(a)}{2!} + \frac{(\partial_v)^3 f(a)}{3!} \\ &= 0 + \sqrt{2}w + \frac{-4w^2}{2!} + \frac{12w^3 - 12w^2 z}{3!} = \sqrt{2}w - 2w^2 + 2w^3 - 2w^2 z \\ &= 2w^2 \cdot (w - (z + 1)) + \sqrt{2}w = f(w, z + 1) = f(a + v). \end{aligned}$$

Die Gleichheit $T_3(f; a)(v) = f(a + v)$ ist kein Zufall, denn f ist ein Polynom der Ordnung 3.

Hausübung

Aufgabe H29 (Laplace-Operator) (3+2=5 Punkte)

Für zweimal stetig partiell differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$ definiert man $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ und nennt Δ den *Laplace-Operator*.

(a) Berechnen Sie Δf_1 und Δf_2 für $f_1(x) = ax + b$ für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und für die Funktion $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - \sin(\pi(x_1 - x_2 + x_3))$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_t(x, y) = \frac{1}{4\pi at} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}}$ mit $t > 0$ die *Wärmeleitungsgleichung* $\frac{\partial}{\partial t} f_t = a \cdot \Delta f_t$ erfüllen.

Lösung:

(a) Es ist $\Delta f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} f_1 = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(ax + b) = \frac{\partial}{\partial x}(a) = 0$. Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
\Delta f_2 &= \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial}{\partial x_1}(x_2x_3 - \pi\cos(\pi(x_1 - x_2 + x_3))) \\
&\quad + \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1x_3 + \pi\cos(\pi(x_1 - x_2 + x_3))) + \frac{\partial}{\partial x_3}(x_1x_2 - \pi\cos(\pi(x_1 - x_2 + x_3))) \\
&= \pi^2 \sin(\pi(x_1 - x_2 + x_3)) + \pi^2 \sin(\pi(x_1 - x_2 + x_3)) + \pi^2 \sin(\pi(x_1 - x_2 + x_3)) \\
&= 3\pi^2 \sin(\pi(x_1 - x_2 + x_3)).
\end{aligned}$$

(b) Wir rechnen erst:

$$\begin{aligned}
\Delta f_t &= \frac{\partial^2 f_t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_t}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{4\pi at} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \frac{-2x}{4at}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{4\pi at} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \frac{-2y}{4at}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{8\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{8\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}}\right) \\
&= -\frac{1}{8\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} - \frac{x}{8\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \frac{-2x}{4at} \\
&\quad - \frac{1}{8\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} - \frac{y}{8\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \frac{-2y}{4at} \\
&= \frac{1}{8\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \left(-1 + \frac{2x^2}{4at} - 1 + \frac{2y^2}{4at}\right) = \frac{1}{4\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \left(-1 + \frac{x^2+y^2}{4at}\right).
\end{aligned}$$

Außerdem ist:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} f_t &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi at} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}}\right) = -\frac{1}{4\pi at^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} + \frac{1}{4\pi at} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{4at^2}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi at^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \left(-1 + \frac{x^2+y^2}{4at}\right) \\
&\implies \frac{\partial}{\partial t} f_t = a \cdot \frac{1}{4\pi a^2t^2} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}} \cdot \left(-1 + \frac{x^2+y^2}{4at}\right) = a \cdot \Delta f_t.
\end{aligned}$$

Aufgabe H30 (Extrema ohne und mit Nebenbedingungen) (1+3+2+3+1=10 Punkte)

Bei dieser Aufgabe geht es darum, Extrema der Funktion $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + xz$ auf der Vollkugel $K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0 \right\}$ zu finden.

(a) Begründen Sie, warum f auf K ein Maximum und ein Minimum annimmt.

(b) Berechnen Sie die Gradienten ∇g, ∇f und die Hesse-Matrix H_f.

(c) Bestimmen Sie die Extrema von f auf $K^\circ = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2-1<0\}$, dem Inneren von K. Hierzu gehen Sie wie bei der Extremwertberechnung ohne Nebenbedingungen vor und überprüfen, ob Ihre Extremwert-Kandidaten in K° liegen.

(d) Bestimmen Sie nun die Extrema von f auf $\partial K = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2+y^2+z^2-1=0\}$, dem Rand von K, das heißt bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$.

(e) Was sind die Extremstellen von f auf K?

Lösung:

(a) Die Vollkugel K ist kompakt und die Funktion f ist stetig. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum nimmt f daher auf K ein Minimum und ein Maximum an.

(b) Wir rechnen:

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla f = \begin{pmatrix} 4x+y+z \\ 4y+x \\ 4z+x \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}_f = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen also insbesondere, dass die Hesse-Matrix unabhängig von der Stelle (x,y,z) ist.

(c) Wir setzen erst den Gradienten von f Null, um kritische Stellen zu finden:

$$\nabla f = 0 \implies \begin{pmatrix} 4x+y+z \\ 4y+x \\ 4z+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 4x+y+z \\ 4y \\ 4z+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4z \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\implies \begin{pmatrix} 4x+2z \\ y \\ 4z+x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} z \\ y \\ -7x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} z \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die einzige kritische Stelle ist also $(0,0,0)$. Die Hesse-Matrix an dieser (aber auch an jeder anderen) Stelle lautet $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ und diese ist positiv definit, da gilt:

$$\det(4) = 4 > 0, \quad \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = 15 > 0,$$
$$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 1 \cdot \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4 \cdot \det\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = -4 + 4 \cdot 15 > 0.$$

Somit liegt an dieser Stelle ein lokales Minimum vor und dieses liegt auch in K°.

(d) Wir gehen nach Lagrange vor (siehe Seite 121 ff. im Skript): Wir definieren eine Funktion L über $L(x,y,z,\lambda) = 2x^2+2y^2+2z^2+xy+xz+\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$ und leiten partiell ab:

$$\begin{aligned} L_x &= 4x+y+z+2\lambda x \overset{!}{=} 0, \\ L_y &= 4y+x+2\lambda y \overset{!}{=} 0, \\ L_z &= 4z+x+2\lambda z \overset{!}{=} 0, \\ L_\lambda &= x^2+y^2+z^2-1 \overset{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Unser Ziel muss es sein, zunächst λ zu bestimmen und dann die Extremstellen-Kandidaten. Wir betrachten zunächst den Fall $y = 0$: Dann ergibt die zweite Gleichung von (1) sofort $x = 0$ und die erste Gleichung liefert $z = 0$, was aber im Widerspruch zur vierten Gleichung steht! Somit kann y nicht Null sein. Ähnlich argumentiert kannt z nicht Null sein.
Betrachten wir nun den Fall $x = 0$. Dann ergibt die erste Gleichung von (1) sofort $z = -y$ und die zweite und dritte Gleichung von (1) liefern beide $4y + 2\lambda y = 0$, also $\lambda = -2$, da $y \neq 0$ ist. Die vierte Gleichung von (1) liefert $2y^2 = 1$, also $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$. Somit sind die Stellen $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ und $(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ Kandidaten für Extremstellen unt der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$.
Ab sofort seien x, y, z allesamt ungleich Null. Wir lösen die ersten drei Gleichungen von (1) jeweils nach λ auf:

$$\lambda = -\frac{4x + y + z}{2x} = -\frac{4y + x}{2y} = -\frac{4z + x}{2z}.$$

Durch Vergleich von je zwei der drei Brüche erhalten wir die folgenden drei Gleichungen:

$$(4x + y + z) \cdot y = (4y + x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad y^2 + yz = x^2. \tag{2}$$

$$(4x + y + z) \cdot z = (4z + x) \cdot x \quad \Longrightarrow \quad yz + z^2 = x^2. \tag{3}$$

$$(4y + x) \cdot z = (4z + x) \cdot y \quad \Longrightarrow \quad xz = xy. \tag{4}$$

Wir teilen die Gleichung (4) durch x (was erlaubt ist, da $x \neq 0$) und erhalten $y = z$, was in die Gleichungen (2) und (3) eingesetzt folgendes ergibt:

$$\begin{bmatrix} y^2 + y \cdot y = x^2 \\ y \cdot y + y^2 = x^2 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{2}y.$$

Wir setzen nun $y = z$ und $x = \pm\sqrt{2}y$ in die vierte Gleichung von (1) ein und erhalten $4y^2 - 1 = 0$ und:

$$(x, y, z) \in \left\{ \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \right\}.$$

(e) Wir berechnen nun die Funktionswerte an obigen Stellen:

$$\begin{aligned}
f(0,0,0) &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0, \\
f\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = f\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) &= 0 + 1 + 1 + 0 + 0 = 2, \\
f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 + \sqrt{2}, \\
f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = 2 - \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Somit ist f auf K in $(0, 0, 0)$ minimal und in $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ maximal.