Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2008
29./30. Mai / 2. Juni

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo"

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Multiple Choice)

Bei den folgenden Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein.

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Behauptungen für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ immer stimmen:

- ☒ Wenn f in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist f in $a \in \mathbb{R}$ auch stetig.
- ☐ Wenn f in $a \in \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f in $a \in \mathbb{R}$ auch differenzierbar.
- ☒ Wenn f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist f auf $\mathbb{R}$ auch stetig.
- ☐ Wenn f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f auf $\mathbb{R}$ auch differenzierbar.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Stetige Funktionen besitzen immer ein Minimum und ein Maximum.
- ☒ Stetige Funktionen besitzen auf kompakten Mengen immer ein Minimum und ein Maximum.
- ☐ Stetige Funktionen besitzen auf kompakten Mengen immer genau ein Minimum und genau ein Maximum.
- ☐ Die offene Einheitskreissscheibe $\mathbb{D}^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$ ist kompakt.
- ☒ Der Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} = 1\right\}$ ist kompakt.
- ☒ Der Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ ist die Höhenlinie einer stetigen Funktion.

(c) Entscheiden Sie, welche der folgenden Behauptungen für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ immer stimmen:

- ☒ Die partielle Ableitung von $f(x,y) = e^{2x+y} + x$ nach x ist $f_x(x,y) = 2e^{2x+y} + 1$.
- ☐ Der Satz von Schwarz lautet $f_{xy} = f_{yx}$ und gilt für alle stetig partiell differenzierbaren Funktionen.
- ☐ Der Gradient $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ von f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Zahl in $\mathbb{R}$.
- ☒ Der Gradient $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ von f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor im $\mathbb{R}^n$.

Lösung:

(a) (i) + (iii) Dies ist die Aussage von Satz 3.1.
(ii) + (iv) Als Gegenbeispiel dient hier die Betragsfunktion $f(x) = |x|$.

(b) (i) + (iii) Die Funktion $f(x, y) = x^2 - y^2$ besitzt auf $\mathbb{R}^2$ kein Maximum, denn zum Beispiel für $y = 0$ ist $\lim_{x\to\infty} f(x, y) = \infty$ und auf der kompakten Menge $\mathbb{S}^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} = 1\right\}$ besitzt sie an den Stellen $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ uneindeutige Maxima.
(ii) Dies ist die Aussage des Satzes vom Minimum und Maximum.
(iv) Die Menge $\mathbb{D}^2$ ist nicht kompakt, da sie nicht abgeschlossen ist: Der Punkt $(1, 0)$ ist ein Randpunkt von $\mathbb{D}^2$ (jede Scheibe um $(1, 0)$ hat eine Schnittmenge mit $\mathbb{D}^2$, liegt aber niemals ganz in $\mathbb{D}^2$), aber $(1, 0)$ gehört selber nicht zu $\mathbb{D}^2$.
(v) Die Menge $\mathbb{S}^1$ ist der Rand der abgeschlossenen Einheitskreisscheibe, also durch jene beschränkt. Ferner ist jeder Punkt von $\mathbb{S}^1$ ein Randpunkt von $\mathbb{S}^1$ und es gibt keine anderen Randpunkte, also ist $\mathbb{S}^1$ auch abgeschlossen, mithin kompakt.
(vi) Die Menge $\mathbb{S}^1$ ist die Höhenlinie der Funktion $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ zur Höhe 1.

(c) (i) Nachrechnen: x ist die Variable und y eine Konstante.
(ii) Der Satz von Schwarz gilt nicht für alle stetig partiell differenzierbaren Funktionen, sondern für alle zweimal stetig partiell differenzierbaren Funktionen.
(iii) + (iv): Siehe Definition.

Aufgabe G29 (Partielle Ableitungen)

Berechnen Sie jeweils die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 2xy^2 + 2x^2y$.

(b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x \ln(y)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^{\sin(x)y} + xy^3$.

Lösung:

(a) $f_x = 2y^2 + 4xy$; $f_y = 4xy + 2x^2$; $f_{xx} = 4y$; $f_{yy} = 4x$; $f_{xy} = f_{yx} = 4x + 4y$.

(b) $f_x = \ln(y)$; $f_y = \frac{x}{y}$; $f_{xx} = 0$; $f_{yy} = -\frac{x}{y^2}$; $f_{xy} = f_{yx} = \frac{1}{y}$.

(c) $f_x = e^{\sin(x)y} \cos(x)y + y^3$; $f_y = e^{\sin(x)y} \sin(x) + 3xy^2$;
$f_{xx} = e^{\sin(x)y} \cos(x)^2y^2 - e^{\sin(x)y} \sin(x)y$; $f_{yy} = e^{\sin(x)y} \sin(x)^2 + 6xy$;
$f_{xy} = f_{yx} = e^{\sin(x)y} \sin(x) \cos(x)y + e^{\sin(x)y} \cos(x) + 3y^2$.

Aufgabe G30 (Satz von Schwarz anwendbar?)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Ist der Satz von Schwarz anwendbar für f in $(x, y) \neq (0, 0)$?

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Berechnen Sie $f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$ und vergleichen Sie mit $f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$.

(d) Ist der Satz von Schwarz anwendbar für f in $(x, y) = (0, 0)$?

Lösung:

(a) Der Satz von Schwarz ist für f in $(x, y) \neq (0, 0)$ anwendbar, da f dort der Quotient beliebig oft differenzierbarer Funktionen ist (und der Nenner nie Null wird), also ist f zweimal stetig partiell differenzierbar. Also gilt $f_{xy}(x, y) = f_{xy}(x, y)$ für $(x, y) \neq (0, 0)$.

(b) Für $(x, y) \neq (0, 0)$ gelten

$$f_x(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2)+xy\cdot 2x)\cdot(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2},$$
$$f_y(x,y) = \frac{(y(x^2-y^2)-xy\cdot 2y)\cdot(x^2+y^2)-xy(x^2-y^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}.$$

Ferner gelten für $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f_x(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,0)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{(x+h)^2} = 0,$$
$$f_x(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{y(h^2-y^2)}{h^2+y^2} = -y,$$
$$f_y(x,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,h)-f(x,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x(x^2-h^2)}{x^2+h^2} = x,$$
$$f_y(0,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{(y+h)^2} = 0.$$

Es fällt auf, dass f in $(0, 0)$ sowohl nach x als auch nach y stetig partiell differenzierbar ist mit $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

(c) Wir rechnen:

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h-0}{h} = -1,$$
$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h} = 1.$$

Also ist $f_{yx}(0, 0) \neq f_{xy}(0, 0)$.

(d) Wäre der Satz von Schwarz anwendbar für f in $(x, y) = (0, 0)$, so wäre $f_{yx}(0, 0) = f_{xy}(0, 0)$, was aber nicht der Fall ist. Das Problem ist, dass f in $(0, 0)$ nicht *zweimal* stetig partiell differenzierbar ist.

Aufgabe G31 (Totale Ableitung und lineare Approximation)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^{xy} + \sin(\pi(x - y))$.

(a) Begründen Sie, warum f an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die totale Ableitung, die in diesem Fall der Gradient $\nabla f(x, y)$ ist, an den Stellen $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (0, 1)$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die den Graphen von f an der Stelle $(0, 0)$ am besten approximiert.

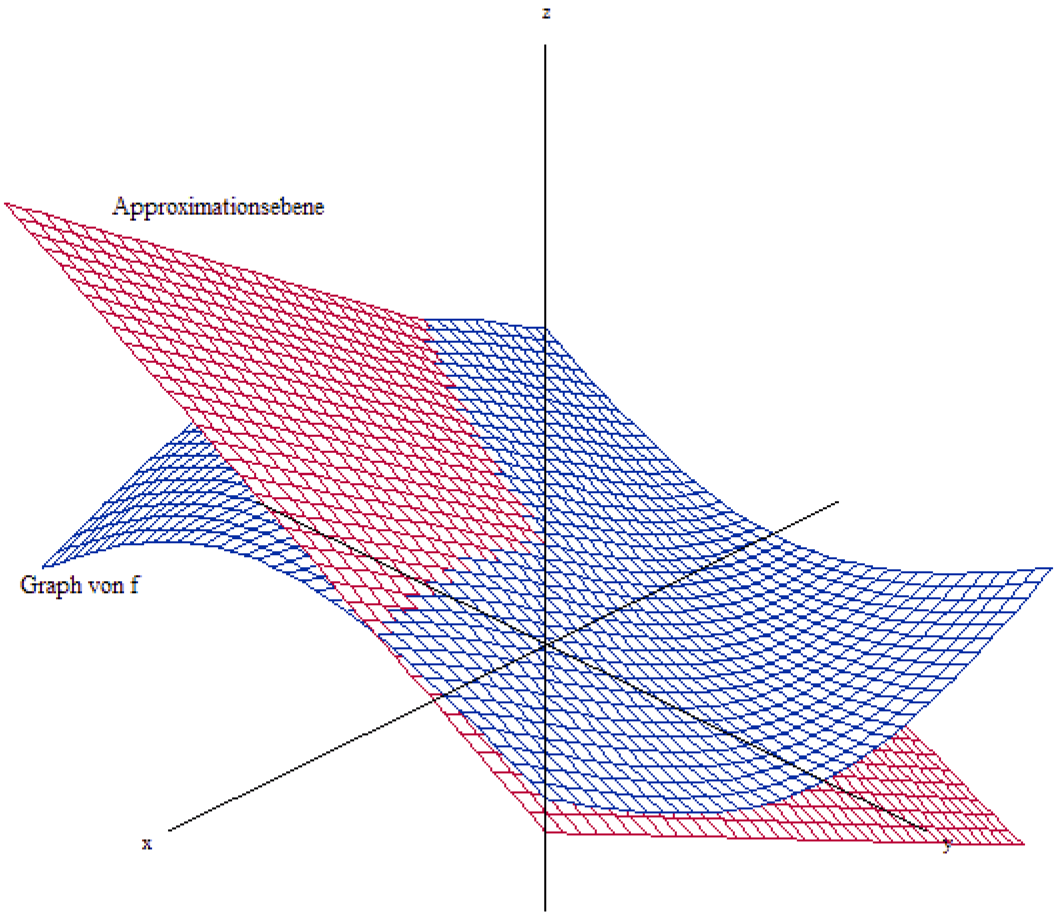
Lösung:

(a) Es ist f als Funktion von x und von y die Summe beliebig oft differenzierbarer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^2$, also insbesondere stetig partiell differenzierbar und somit nach Satz 7.4 total differenzierbar.

(b) Wir bilden die partiellen Ableitungen: $f_x = e^{xy}\cdot y + \pi\cos(\pi(x-y))$, $f_y = e^{xy}\cdot x - \pi\cos(\pi(x-y))$. Somit ist der Gradient allgemein: $\nabla f(x, y) = (e^{xy} \cdot y + \pi\cos(\pi(x - y)), e^{xy} \cdot x - \pi\cos(\pi(x - y)))^T$ und speziell: $\nabla f(1, 0) = (-\pi, 1 + \pi)^T$, $\nabla f(0, 1) = (1 - \pi, +\pi)^T$.

(c) Die entsprechende Ebene ist gegeben durch (siehe Seite 97 im Skript):

$$z(x,y) = f(0,0) + \nabla f(0,0)^T\left(\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right) = 1 + (\pi, -\pi)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = 1 + \pi x - \pi y.$$


z
Approximationsebene
Graph von f
x
y

Hausübung

Aufgabe H26 (Partielle Ableitungen) (3+3=6 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{yz}, f_{xz}$:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + xyz$.

(b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x\ln(yz) - ze^{x^3y^2}$.

Lösung:

(a) $f_x = 3x^2 + 2xy + 2xz + y^2 + z^2 + yz$; $\quad f_y = 3y^2 + x^2 + 2xy + 2yz + z^2 + xz$;
$f_z = 3z^2 + x^2 + y^2 + 2xz + 2yz + xy$; $\quad f_{xx} = 6x + 2y + 2z$; $\quad f_{yy} = 6y + 2x + 2z$;
$f_{zz} = 6z + 2x + 2y$; $\quad f_{xy} = 2x + 2y + z$; $\quad f_{yz} = 2y + 2z + x$; $\quad f_{xz} = 2x + 2z + y$.

(b) $f_x = \ln(yz) - 3x^2y^2ze^{x^3y^2}$; $\quad f_y = \frac{x}{y} - 2x^3yze^{x^3y^2}$; $\quad f_z = \frac{x}{z} - e^{x^3y^2}$;
$f_{xx} = -6xy^2ze^{x^3y^2} - 9x^4y^4ze^{x^3y^2}$; $\quad f_{yy} = -\frac{x}{y^2} - 2x^3ze^{x^3y^2} - 4x^6y^2ze^{x^3y^2}$;
$f_{zz} = -\frac{x}{z^2}$; $\quad f_{xy} = \frac{1}{y} - 6x^2yze^{x^3y^2} - 6x^5y^3ze^{x^3y^2}$; $\quad f_{yz} = -2x^3ye^{x^3y^2}$; $\quad f_{xz} = \frac{1}{z} - 3x^2y^2e^{x^3y^2}$.

Aufgabe H27 (Totale Ableitung) (1+3+2=6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \cos(\pi(xyz)) - \pi x^2y^2z - 1$.

(a) Begründen Sie, warum f an jeder Stelle $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die totale Ableitung an der Stelle $(x,y,z) = (1,1,1)$.

(c) Bestimmen Sie die lineare Approximation von f an der Stelle $(1,1,0)$.

Lösung:

(a) Es ist f als Funktion von x und von y und von z die Summe beliebig oft differenzierbarer Funktionen auf ganz $\mathbb{R}^3$, also insbesondere stetig partiell differenzierbar und somit nach Satz 7.4 total differenzierbar.

(b) Wir bilden die partiellen Ableitungen:

$$f_x = -\pi yz\sin(\pi(xyz)) - 2\pi xy^2z; \quad f_y = -\pi xz\sin(\pi(xyz)) - 2\pi x^2yz$$
$$f_z = -\pi xy\sin(\pi(xyz)) - \pi x^2y^2.$$

Somit ist der Gradient allgemein:

$$\nabla f(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\pi yz\sin(\pi(xyz)) - 2\pi xy^2z^2 \\ -\pi xz\sin(\pi(xyz)) - 2\pi x^2yz^2 \\ -\pi xy\sin(\pi(xyz)) - \pi x^2y^2 \end{pmatrix} \text{ und speziell: } \nabla f(1,1,1) = \begin{pmatrix} -2\pi \\ -2\pi \\ -\pi \end{pmatrix}.$$

(c) Die lineare Approximation ist gegeben durch:

$$w(x,y,z) = f(1,1,0) + \nabla f(1,1,0)^T \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 + (0,0,-\pi) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = -\pi z.$$

Aufgabe H28 (Anwendung der totalen Ableitung: Newton-Verfahren) (1+2+4=7 Punkte)

Wir wollen einen Schnittpunkt zweier Ellipsen mit Hilfe des Newton-Verfahrens im $\mathbb{R}^2$ approximieren. Gegeben seien die beiden Ellipsen F und G durch die Gleichungen $f(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} - 1 = 0$ und $g(x,y) = \frac{(x+1)^2}{6{,}25} + \frac{(y-1)^2}{4} - 1 = 0$.

(a) Skizzieren Sie beide Ellipsen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie die Gradienten $\nabla f(x,y)$ und $\nabla g(x,y)$.

(c) Das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^2$ verläuft folgendermaßen: Wenn man (x_k, y_k) hat, bestimmt man erst Δx und Δy, indem man die lineare Approximationen für f und g einsetzt:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}, y_{k+1}) &= 0 \approx f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)\Delta x + f_y(x_k, y_k)\Delta y \\ \text{und } g(x_{k+1}, y_{k+1}) &= 0 \approx g(x_k, y_k) + g_x(x_k, y_k)\Delta x + g_y(x_k, y_k)\Delta y \end{aligned}$$

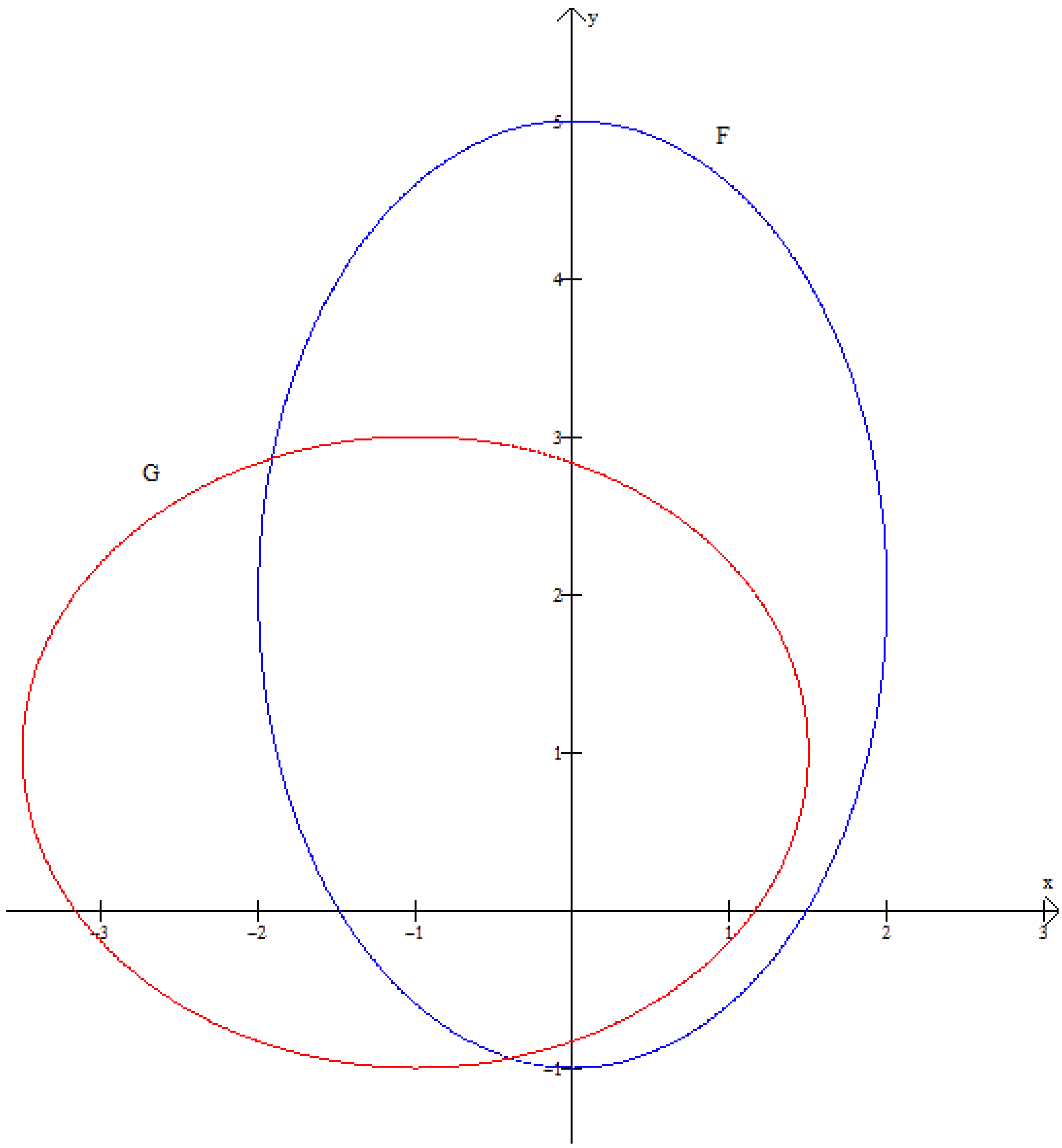
und dann das resultierende lineare Gleichungssystem löst:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_k, y_k) & f_y(x_k, y_k) \\ g_x(x_k, y_k) & g_y(x_k, y_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}.$$

Man erhält dann (x_{k+1}, y_{k+1}), indem man $(x_k, y_k) + (\Delta x, \Delta y)$ rechnet.
Starten Sie mit $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und bestimmen Sie die Näherung (x_2, y_2) für einen Schnittpunkt von F und G.

Lösung:

(a)



(b) $\nabla f(x,y) = \left(\frac{x}{2}, \frac{2(y-2)}{9}\right)^T$; $\nabla g(x,y) = \left(\frac{2(x+1)}{6{,}25}, \frac{y-1}{2}\right)^T$.

(c) Das erste zu lösende lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} f_x(0,0) & f_y(0,0) \\ g_x(0,0) & g_y(0,0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(0,0) \\ -g(0,0) \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0 & -4/9 \\ 8/25 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/9 \\ 0,59 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,11 \\ -1,25 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0-0,11 \\ 0-1,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,11 \\ -1,25 \end{pmatrix}.$$

Das zweite zu lösende lineare Gleichungssystem lautet:

$$\begin{pmatrix} f_x(-0,11,-1,25) & f_y(-0,11,-1,25) \\ g_x(-0,11,-1,25) & g_y(-0,11,-1,25) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(-0,11,-1,25) \\ -g(-0,11,-1,25) \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} -0,055 & -0,7222 \\ 0.2848 & -1,125 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,177 \\ -0,3924 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \quad \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,31 \\ 0,27 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0,11-0,31 \\ -1,25+0,27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,42 \\ -0,98 \end{pmatrix}.$$

Wie man in der Skizze erkennen kann, ist $(-0,42,-0,98)$ auch eine gute Näherung für den „unteren“ Schnittpunkt.