Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2008
22./23./26. Mai

# 8. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

## Gruppenübung

Auf diesem Übungsblatt möchten wir uns zwei Themen der zweiten Hälfte der Veranstaltung, der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher, nähern.

**Aufgabe G24** (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen einer Veränderlicher)
Welche der folgenden Funktionen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ sind stetig, welche differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung $f_i'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x \in D_i$ an.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

$$f_3 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|\,; \quad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

**Lösung:** Zunächst sollte bedacht werden, dass eine Funktion dort schon stetig ist, wo sie differenzierbar ist.

1. Die Funktion $f(x) = x$ ist auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar und Produkte differenzierbarer Funktionen sind differenzierbar, also beschreibt $f_1(x) = x \cdot x = x^2$ eine differenzierbare (und also auch stetige) Funktion auf ganz $\mathbb{R}$. Es ist $f_1'(x) = 2x$.
2. Die Funktion $f_2$ ist überall stetig. Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $f_2$ differenzierbar, da für jedes $a \neq 0$ eine Umgebung $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ mit einem $\varepsilon > 0$ existiert, wo $f_2(x)$ gleich $-x$ oder $x$ ist für alle $x \in (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ und dieses sind differenzierbare Funktionen mit Ableitung $f_2'(x) = -1$ beziehungsweise $f_2'(x) = +1$. In 0 ist $f_2$ nicht differenzierbar, da der Differenzenquotient $\frac{f_2(h)-f_2(0)}{h} = \frac{|h|-0}{h}$ keinen Grenzwert für $h \to 0$ hat, denn für $h < 0$ ist der Differenzenquotient immer $-1$ und für $h > 0$ immer 1.
3. Die Funktion $f_3$ ist auf dem ganzen Definitionsbereich $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar und daher auch stetig, die Ableitung ist $f_3'(x) = -1$ für $x < 0$ und $f_3'(x) = 1$ für $x > 0$, siehe (b).
4. Auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $f_4$ der Kehrwert der differenzierbaren Funktion $f(x) = x$, was immer ungleich Null ist, also ist $f_4$ dort differenzierbar mit Ableitung $f_4'(x) = -\frac{1}{x^2}$ und also auch stetig. Die Funktion $f_4$ ist aber in 0 nicht stetig (und damit erst recht nicht differenzierbar), da zum Beispiel die Folge $\left(\frac{1}{k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen 0 konvergiert, aber es gilt:

$$f\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right) = f(0) = 0 \neq \infty = \lim_{k\to\infty} k = \lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}\right).$$

**Aufgabe G25** ($\mathbb{R}^n$ als topologischer Raum)

Wir definieren für zwei Elemente $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ deren *Abstand* als $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Mit diesem Abstand ergeben sich die Begriffe *Umgebung, innerer Punkt, offene Teilmenge, Randpunkt, abgeschlossene Teilmenge* [1], siehe Skript, Seiten 86 und 87.

(a) Geben Sie eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an, skizzieren Sie sie und begründen Sie kurz, warum sie offen ist.

(b) Geben Sie eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an, skizzieren Sie sie und begründen Sie kurz, warum sie abgeschlossen ist.

(c) Gibt es Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die offen und gleichzeitig abgeschlossen sind? Wenn ja, welche?

(d) Gegeben sei die Menge $Q = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -1 < x_1 \leq 1 \text{ und } -0,5 \leq x_2 < 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

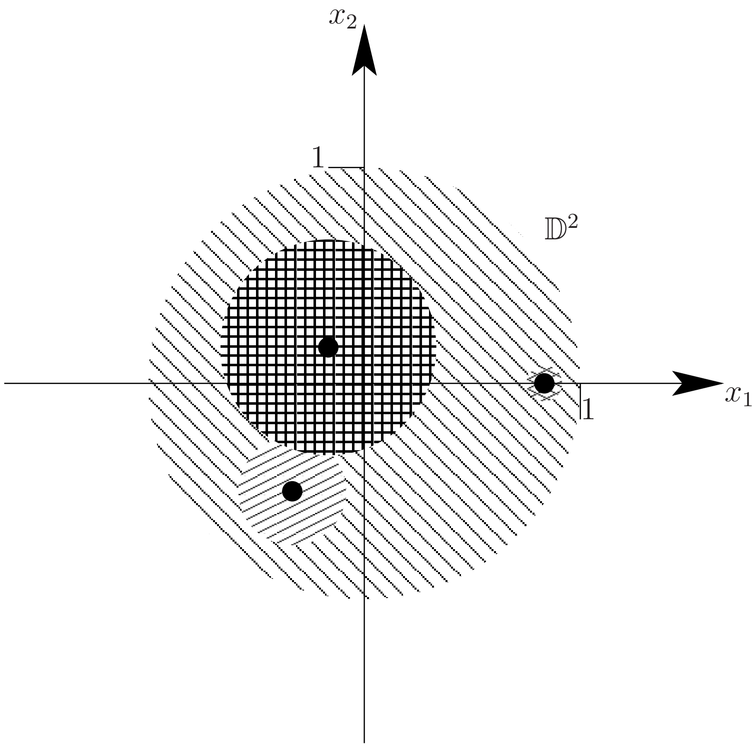
   i. Skizzieren Sie $Q$.

   ii. Geben Sie einen inneren Punkt und einen Randpunkt von $Q$ an.

   iii. Ist $Q$ offen? Oder abgeschlossen? Weder noch?

**Lösung:**

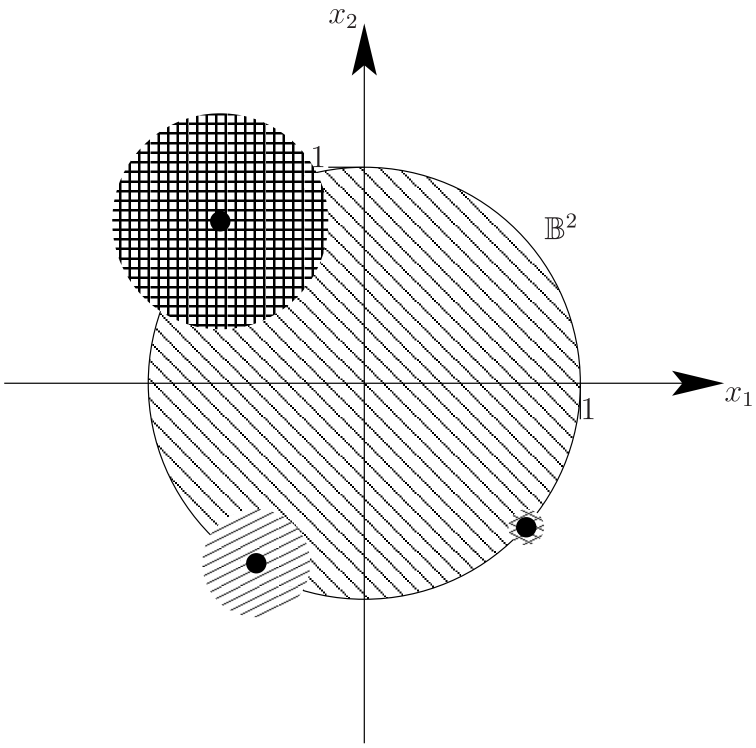
(a) Wir nehmen die offene Einheitskreissscheibe $\mathbb{D}^2 = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1 \right\}$. Um jeden Punkt aus $\mathbb{D}^2$ kann man eine kleine Scheibe legen, die noch vollständig in $\mathbb{D}^2$ liegt:




Deswegen ist $\mathbb{D}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ offen.

(b) Wir nehmen die abgeschlossene Einheitskreissscheibe $\mathbb{B}^2 = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq 1 \right\}$.

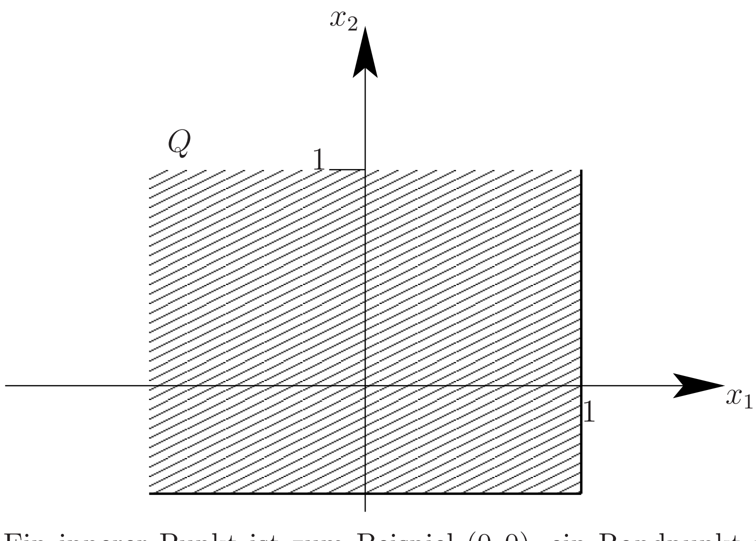
[1] Immer wenn diese Begriffe definiert werden können, redet man von einem *topologischen Raum* und wenn man einen topologischen Raum hat, kann man von stetigen Funktionen reden.




Der Rand von $\mathbb{B}^2$ ist die Einheitskreislinie, die man $\mathbb{S}^1$ nennt, denn nur für Punkte $x$ aus $\mathbb{S}^1$ gilt: „Jede Scheibe um $x$ liegt nicht ganz in $\mathbb{B}^2$, schneidet aber $\mathbb{B}^2$.“
Also ist $\mathbb{S}^1$ der Rand von $\mathbb{B}^2$, aber $\mathbb{B}^2$ umfasst auch $\mathbb{S}^1$, also ist $\mathbb{B}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ abgeschlossen.

(c) Das gilt für die leere Menge $\emptyset$: Es gibt keine Punkte in $\emptyset$, also auch keine Kugeln um Punkte aus $\emptyset$, die $\emptyset$ verlassen könnten. Also ist $\emptyset$ offen. Ferner ist $\emptyset$ abgeschlossen, denn $\emptyset$ hat keinen Rand, also gibt es keine Randpunkte, die nicht in $\emptyset$ liegen könnten.
Ferner ist ganz $\mathbb{R}^n$ offen und abgeschlossen, denn Kugeln von Punkten im $\mathbb{R}^n$ liegen wieder im ganzen Raum $\mathbb{R}^n$ und Randpunkte sind auch immer Punkte im $\mathbb{R}^n$.
*Hinweis:* Man kann zeigen, dass $\emptyset$ und $\mathbb{R}^n$ die einzigen Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ sind, die offen und gleichzeitig abgeschlossen sind.

(d) i.




ii. Ein innerer Punkt ist zum Beispiel $(0,0)$, ein Randpunkt zum Beispiel $(1,-0,5)$, aber auch $(-1,1)$.

iii. $Q$ ist nicht offen, denn jede Scheibe um $(1, -0,5)$ verlässt $Q$, aber $Q$ ist auch nicht abgeschlossen, denn $(-1, 1)$ ist ein Randpunkt von $Q$, der nicht zu $Q$ gehört.

**Aufgabe G26** (Folgen und Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, das heißt einen Grenzwert im $\mathbb{R}^n$ hat. Wie lautet dieser Grenzwert?

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ist $h$ auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stetig? Ist $h$ in $(0, 0)$ stetig? Ist $h$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig?
*Hinweis:* Betrachten Sie für die zweite Frage die Folge aus (a) mit $n = 2$.

**Lösung:**

(a) Die Folge konvergiert gegen $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, weil gilt:

$$\left|\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) - (0, 0, \ldots, 0)\right| = \left|\sqrt{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} + \ldots + \frac{1}{k^2}}\right| = \frac{\sqrt{n}}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(b) $h$ ist auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ der Quotient von Polynomen, also stetigen Funktionen, wobei der Nenner ungleich Null ist, somit ist $h$ auf $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ stetig. Im Punkt $(0, 0)$ ist $h$ aber nicht stetig, weil gilt:

$$\lim_{k\to\infty} h\left(\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{2}{k^2}} = \frac{1}{2} \neq 0 = h(0, 0) = h\left(\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)\right).$$

Somit ist $h$ auch nicht auf der größeren Menge $\mathbb{R}^2$ stetig.

**Aufgabe G27** (Kompaktheit und Stetigkeit)

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist, das heißt sie enthält alle ihre Randpunkte und wird von einer genügend großen Kugel umfasst. Kompaktheit ist einer der wichtigsten Begriffe in der Mathematik überhaupt. Einer der Gründe dafür ist der Satz vom Minimum und Maximum:

**Satz:** Sei $K$ kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat $f$ ein Minimum und ein Maximum, das heißt, es gibt $a, b \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

(a) Geben Sie eine kompakte Teilmenge jeweils des $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^n$ (allgemein) an. Geben Sie zwei *nichtkompakte* Teilmengen des $\mathbb{R}$ an, eine abgeschlossen und die andere beschränkt.

(b) Welche Quadriken im $\mathbb{R}^2$ und welche im $\mathbb{R}^3$ sind kompakt?

(c) Betrachten Sie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Nimmt $h$ ein Maximum an? Und nimmt $h$ eingeschränkt auf den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1\right\}$ ein Maximum an?

**Lösung:**

(a) Das Intervall $[-1; 1]$, die abgeschlossene Kreisscheibe $\mathbb{B}^2 = \left\{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x_1^2 + x^2} \leq 1\right\}$ und allgemein $\mathbb{B}^n = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x_1^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2} \leq 1\right\}$ sind jeweils abgeschlossene Kugeln im ein-, zwei- beziehungsweise $n$-dimensionalen Raum, also durch sich

selbst umfast, daher beschränkt. Außerdem sind all diese Mengen abgeschlossen, da die Randpunkte immer dazugehören. Also sind dies alles drei kompakte Mengen.
$\mathbb{R}$ ist selber unbeschränkt, aber abgeschlossen; das halboffene Intervall $(-1; 1]$ ist beschränkt, aber nicht abgeschlossen. Also sind dies beides nichtkompakte Mengen.

(b) Hyperbeln, Geradenpaare, Geraden (im $\mathbb{R}^2$), Hyperboloide, Kegel, Paraboloide, Zylinder, Ebenenpaare, Ebenen (im $\mathbb{R}^3$) sind unbeschränkt, also nicht kompakt. Ellipsen (im $\mathbb{R}^2$), Ellipsoide (im $\mathbb{R}^3$), Punkte und die leere Menge (jeweils im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$) sind dagegen beschränkt und enthalten alle ihre Randpunkte, sind deswegen abgeschlossen und daher kompakt.

(c) Die Funktion $h$ nimmt kein Maximum an, denn zum Beispiel mit festem $x_1$ und wachsendem $x_2$ wird $h(x_1, x_2)$ beliebig groß. Da aber $h$ als Polynom in $x_1$ und $x_2$ stetig ist und $\mathbb{S}^1$ kompakt, nimmt die auf $\mathbb{S}^1$ eingeschränkte Funktion nach dem Satz vom Minimum und Maximum ein Maximum an.

## Hausübung

**Aufgabe H23** (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen einer Veränderlicher) (2+2+3=7 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ sind stetig, welche differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung $f_i'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x \in D_i$ an.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\left(x^2\right)}; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^2; \quad f_3 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) \cdot \sin(\cos(x + \pi)).$$

**Lösung:**

1. Die Funktion $f_1$ ist die Hintereinanderausführung der Exponentialfunktion nach dem Polynom $x^2$, was beides auf $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen sind. Somit ist $f_1$ differenzierbar, also auch stetig. Die Ableitung lautet nach Kettenregel: $f_1'(x) = e^{\left(x^2\right)} \cdot 2x$.
2. Für $x \geq 0$ ist $|x| = x$, also $f_2(x) = x^2$. Für $x < 0$ ist $|x| = -x$, also $f_2(x) = (-x)^2 = (-1)^2 \cdot x^2 = x^2$. Somit ist $f_2(x) = x^2$, damit differenzierbar und stetig auf $\mathbb{R}$ und $f_2'(x) = 2x$.
3. Die Funktion $f_3$ ist das Produkt der differenzierbaren Funktion ln mit der Hintereinananderausführung der differenzierbaren Funktionen sin und cos nach der differenzierbaren Addition mit der Konstanten $\pi$. Somit ist $f_3$ differenzierbar, also auch stetig. Die Ableitung lautet nach Produkt- und Kettenregel:

$$\begin{aligned} f_3'(x) &= \frac{1}{x} \cdot \sin(\cos(x + \pi)) + \ln(x) \cdot \cos(\cos(x + \pi)) \cdot (-\sin(x + \pi) \cdot 1) \\ &= \frac{\sin(\cos(x + \pi))}{x} - \ln(x) \cdot \cos(\cos(x + \pi)) \cdot \sin(x + \pi). \end{aligned}$$

**Aufgabe H24** (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$) (1+2+1=4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^4}{x^4 + y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ist $h$ auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ stetig? Ist $h$ in $(0, 0)$ stetig? Ist $h$ auf $\mathbb{R}^2$ stetig?
*Hinweis:* Betrachten Sie für die zweite Frage eine allgemeine Folge $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen (0,0) konvergiert und benutzen Sie die Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

**Lösung:** $h$ ist auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ der Quotient von Polynomen, also stetigen Funktionen, wobei der Nenner ungleich Null ist, also selber stetig. Wir wollen nun zeigen, dass $h$ auch in 0 stetig ist: Sei dazu $(x_k, y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Zahlenpaaren im $\mathbb{R}^2$, die gegen $(0,0)$ konvergiert, also $\lim_{k\to\infty} x_k = 0 = \lim_{k\to\infty} y_k$. Wir benutzen die Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$ für $a = x_k^2$ und $b = y_k^3$:

$$\begin{aligned} h\left((x_k, y_k)\right) &= \frac{x_k^2 y_k^4}{x_k^4 + y_k^6} = y_k \cdot \frac{x_k^2 y_k^3}{x_k^4 + y_k^6} \leq y_k \cdot \frac{\frac{1}{2}\left(x_k^4 + y_k^6\right)}{x_k^4 + y_k^6} = \frac{y_k}{2} \\ \Longrightarrow\ 0 &\leq \lim_{k\to\infty} h\left((x_k, y_k)\right) \leq \lim_{k\to\infty} \frac{y_k}{2} = \frac{0}{2} = 0 \\ \Longrightarrow\ &\lim_{k\to\infty} h\left((x_k, y_k)\right) = 0 = h(0) = h(\lim_{k\to\infty}(x_k, y_k)). \end{aligned}$$

Somit ist $h$ auch in $(0,0)$ stetig, also sogar auf ganz $\mathbb{R}^2$.

**Aufgabe H25** (Kompaktheit und Stetigkeit) (2+2=4 Punkte)

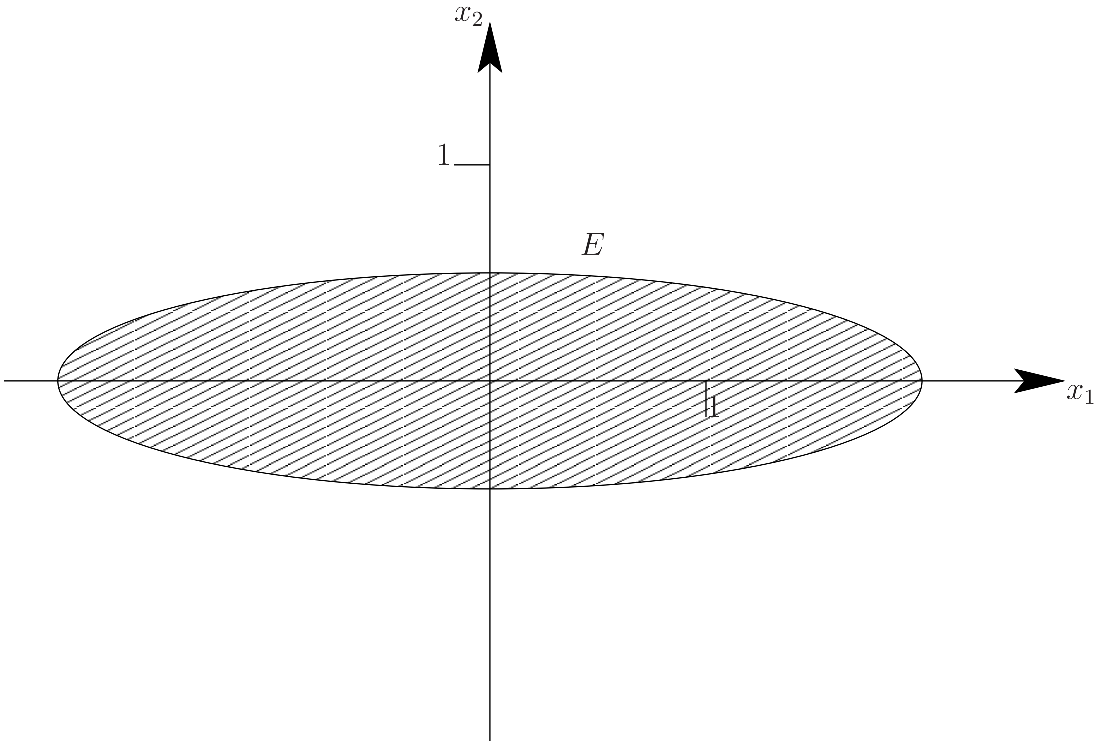
Sei $E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2} \leq 1 \right\}$.

(a) Ist $E$ kompakt?

(b) Nimmt die Funktion $f : E \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{\sin(x_1^2 - x_2)}{e^{x_1} + |x_2^2|}$ ein Minimum an? Begründen Sie.

**Lösung:**

(a)




$E$ wird zum Beispiel durch die abgeschlossene Scheibe mit Radius 2 um den Nullpunkt umfasst, ist also beschränkt. Der Rand von $E$ besteht aus der Ellipsenlinie, die aber zu $E$ gehört. Also ist $E$ abgeschlossen, damit insgesamt kompakt.

(b) Da $E$ kompakt ist und $f$ der Quotient von stetigen Funktionen, wobei der Nenner ungleich Null ist, nimmt $f$ auf $E$ nach dem Satz vom Minimum und Maximum ein Minimum an.