Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
15./16./19. Mai

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo"

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Multiple Choice)

(a) Suchen Sie in Ihrem Skript die Definition für eine orthogonale Matrix. Welche der folgenden Eigenschaften erfüllen orthogonale Matrizen?

- ☒ Sie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann gilt $A^{-1} = A^T$
- ☐ Die Spalten der Matrix bilden keine Basis des entsprechenden Vektorraums $\mathbb{R}^n$.
- ☒ Die zur Matrix zugehörige lineare Abbildung erhält die Länge von Vektoren.
- ☒ Jeder Spaltenvektor in der Matrix hat Länge 1.
- ☐ Sie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann ist auch $A + A^T$ wieder orthogonal.

(b) In Ihrem Skript finden Sie verschiedene Kriterien für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen. Welche der folgenden Matrizen sind sicher diagonalisierbar?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 2 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}$
- ☒ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe G21 (Orthonormalbasis, Koordinaten eines Vektors)

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Geben Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in Bezug auf die gegebenen Basisvektoren an.

Lösung: Es gilt:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \cdot v_2 = 0 \\ v_1 \cdot v_3 = 0 \\ v_2 \cdot v_3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind paarweise orthogonal.}$$

Es gilt ferner:

$$\left.\begin{array}{rcl} |v_1| &=& \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \\ |v_2| &=& 1 \\ |v_3| &=& \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow v_1, v_2, v_3 \text{ sind normiert.}$$

Wegen

$$\begin{array}{l} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1 + \alpha_3) \\ \alpha_2 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_1 - \alpha_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \end{array}$$

sind v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

Es folgt also, dass v_1, v_2, v_3 eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Daher gilt

$$\begin{array}{rcl} v &=& (v_1 \cdot v)\, v_1 + (v_2 \cdot v)\, v_2 + (v_3 \cdot v)\, v_3 \\ &=& \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_1 + 2v_2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}}\right) v_3 \\ &=& 2\sqrt{2}v_1 + 2v_2 - \sqrt{2}v_3. \end{array}$$

So können wir den Vektor v nun in Bezug auf die Basis $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ folgendermaßen angeben:
$\left[\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ 2 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}\right]_B$

Aufgabe G22 (Quadriken, Hauptachsentransformation, Kurventypen)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{3}{2}.$$

Von welchem Flächentyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Lösung: Die Matrix A hat die Eigenwerte 2, 4 und -2 mit den normierten Eigenvektoren $c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0)^T$ und $c_3 = (0,0,1)^T$. Sei $C = (c_1, c_2, c_3)$ und $d = C^T b = (0,4,2)^T$. In den neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 lautet die Gleichung dann

$$2y_1^2 + 4y_2^2 - 2y_3^2 + 4y_2 + 2y_3 + \frac{3}{2} = 0.$$

Mit Hilfe zweier quadratischer Ergänzungen erhält man:

$$2y_1^2 + 4\left(y_2^2 + y_2 + \frac{1}{4}\right) - 1 - 2\left(y_3^2 - y_3 + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2y_1^2 + 4\left(y_2 + \frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(y_3 - \frac{1}{2}\right) + 1$$

Führt man neue Koordinaten $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2 + \frac{1}{2}$ und $z_3 := y_3 - \frac{1}{2}$ ein, ergibt sich die neue Gleichung

$$2z_1^2 + 4z_2^2 - 2z_3^2 = -1,$$

aus der sich ablesen läßt, daß es sich bei der Lösungsmenge um ein *zweischaliges Hyperboloid* handelt. Siehe auch Skript Seite 82.

Aufgabe G23 (Hauptachsentransformation)

Betrachte die durch

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

beschriebene Menge im $\mathbb{R}^2$. Schreibe diese Gleichung als $x^T A x + b^T x = c$ und führe die Hauptachsentransformation durch. Um was für ein geometrisches Gebilde handelt es sich?

Lösung:

Die Gleichung ist $x^T \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} x + x^T \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = 1$. Die Eigenwerte von $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ sind 2 und 4. Wählt man die Eigenvektoren $(1,-1)^T$ bzw. $(1,1)^T$, so erhält man bezüglich des (ebenfalls orthogonalen, aber um den Faktor $\sqrt{2}$ gestreckten) Koordinatensystems $y_1 = x_1 - x_2, y_2 = x_1 + x_2$ die transformierte Form

$$A' = S^T A S = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

und $b' = S^T(12,4)^T = (8,16)^T$. Durch quadratische Ergänzung kommt man zu

$$4(y_1+1)^2 + 8(y_2+1)^2 + 1 - 4 - 8 = 0.$$

Es handelt sich also um eine Ellipse, deren Hauptachsen sich im Punkt $(-1,-1)$ des neuen Koordinatensystems schneiden und zu den Koordinatenachsen des neuen Koordinatensystems parallel sind.

Dies entspricht im ursprünglichen Koordinatensystem einer Ellipse, deren um $\frac{\pi}{2}$ gegenüber dem Standardkoordinatensystem gedrehte Hauptachsen sich im Punkt $(-2,0)$ schneiden. Die „aufsteigende“ Hauptachse hat im neuen Koordinatensystem die Länge $\frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{2}}$, dies entspricht im ursprünglichen Koordinatensystem einer Hauptachse von $\frac{\sqrt{11}}{2}$. Analog hat die „abfallende “Hauptachse die Länge $\sqrt{2}\frac{\sqrt{11}}{2} = \sqrt{\frac{11}{2}}$.

Die gleichen Lösungen erhält man natürlich auch bei normierten Eigenvektoren.

Hausübung

Aufgabe H19 (Kurventypen von Quadriken) (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2+6\sqrt{2} \\ 2+6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 20.$$

Von welchem Flächentyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Lösung: Die Matrix A hat die Eigenwerte 3, 2 und 1 mit den normierten Eigenvektoren $c_1 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$, $c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0)^T$ und $c_3 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})^T$. Sei $C = (c_1, c_2, c_3)$ und $d = C^T b = (0, 12, -4)^T$. In den neuen Koordinaten y_1, y_2, y_3 bezüglich der Basis c_1, c_2, c_3 lautet die Gleichung dann:

$$3y_1^2 + 2y_2^2 + y_3^2 + 12y_2 - 4y_3 + 20 = 0.$$

Mit Hilfe zweier quadratischer Ergänzungen erhält man:

$$3y_1^2 + 2(y_2^2 + 6y_2 + 9) - 18 + (y_3^2 - 4y_3 + 4) - 4 + 20 = 3y_1^2 + 2(y_2 + 3)^2 + (y_3 - 2)^2 + -2$$

Führt man neue Koordinaten $z_1 := y_1$, $z_2 := y_2 + 3$ und $z_3 := y_3 - 2$ ein, ergibt sich die neue Gleichung

$$3z_1^2 + 2z_2^2 + z_3^2 = 2$$

bzw.

$$\frac{3}{2}z_1^2 + z_2^2 + \frac{1}{2}z_3^2 = 1,$$

aus der sich ablesen läßt, daß es sich bei der Lösungsmenge um ein *Ellipsoid* mit den Halbachsen der Länge $\sqrt{\frac{2}{3}}$, 1 und $\sqrt{2}$ handelt.

Aufgabe H20 (Wiederholung Basistransformation) (4 Punkte)

Motivation für Basistransformation: Wir haben gelernt, dass man lineare Abbildungen als Matrizen angeben kann. Ist uns eine Abbildung als Matrix gegeben, so meist in Bezug auf die Standardbasis. Das hat den Sinn, dass wir Vektoren deren Koordinaten in Standardbasis gegeben sind, mit dieser Matrix durch Multiplikation abbilden können. Doch was wissen wir beispielsweise über die Abbildung, die durch die Matrix A unten beschrieben ist?

Es ist schwer, aus einer Matrix mit vielen Einträgen herauszulesen, was diese Abbildung geometrisch wirklich tut. Daher sucher wir nach einer Basis, in welcher die Form der Matrix günstig ist, um abzulesen, was die Abbildung geometrisch bewirkt. Am erstrebenswertesten ist eine Diagonalmatrix. Auf der Diagonalen werden dann die Eigenwerte der Matrix stehen. An diesen Diagonaleinträgen können wir ablesen, welche Streckungen, Stauchungen oder Spiegelungen die Abbildung in Bezug auf die verwendeten Basisvektoren bewirkt. Die Basisvektoren sind genau die Eigenvektoren, da, nach Definition, ein Eigenvektor genau auf ein Vielfaches seiner selbst abgebildet wird.

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix P an, für die $P^T AP$ diagonal ist und berechnen Sie $P^T AP$.

Lösung:
Das charakteristische Polynom $p_A(t) = (t-1)^2(t-4)$ hat die Nullstellen 1 (mit Vielfachheit 2) und 4. Für letzteren findet man den (normierten) Eigenvektor $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Für Eigenwert 1 hat das System $(A - tE_3)v = 0$ zwei linear unabhängige Lösungen. Eine ist z.B. $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$. Dazu sucht man nun eine weitere, orthogonale und findet z.B. $(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}})$. Damit erhält man

$$P := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$$

und

$$P^T AT = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H21 (Quadriken, Hauptachsentransformation, Kurventypen) (5 Punkte)
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Skizziere die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.

Lösung: Die Matrix A besitzt den Eigenwert 1 mit Eigenvektor $(1,1)^T$ und den Eigenwert 3 mit Eigenvektor $(-1,1)^T$. Seien $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)^T$ und $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1)^T$ die normierten Eigenvektoren. Dann ist

$$C = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix für den Wechsel zur Orthonormalbasis e_1, e_2. Sei $d = C^T b = (0, -4)$. In der neuen Basis (mit neuer Variablen y) lautet die Gleichung dann

$$(Cy)^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

bzw.

$$y^T C^T ACy + b^T Cy + c = 0$$

oder ausgeschrieben

$$y_1^2 + 3y_2^2 - 4y_2 + \frac{1}{3} = 0.$$

Um das Linearglied $-4y_2$ zu beseitigen, führt man eine quadratische Ergänzung durch:

$$\begin{aligned} y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2\right) + \frac{1}{3} &= y_1^2 + 3\left(y_2^2 - \frac{4}{3}y_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) + \frac{1}{3} \\ &= y_1^2 + 3\left(y_2 - \frac{2}{3}\right)^2 - 1. \end{aligned}$$

Setzt man nun $z_1 := y_1$ und $z_2 := y_2 - \frac{2}{3}$, dann lautet die Gleichung in den neuen Variablen

$$z_1^2 + 3z_2^2 = 1.$$

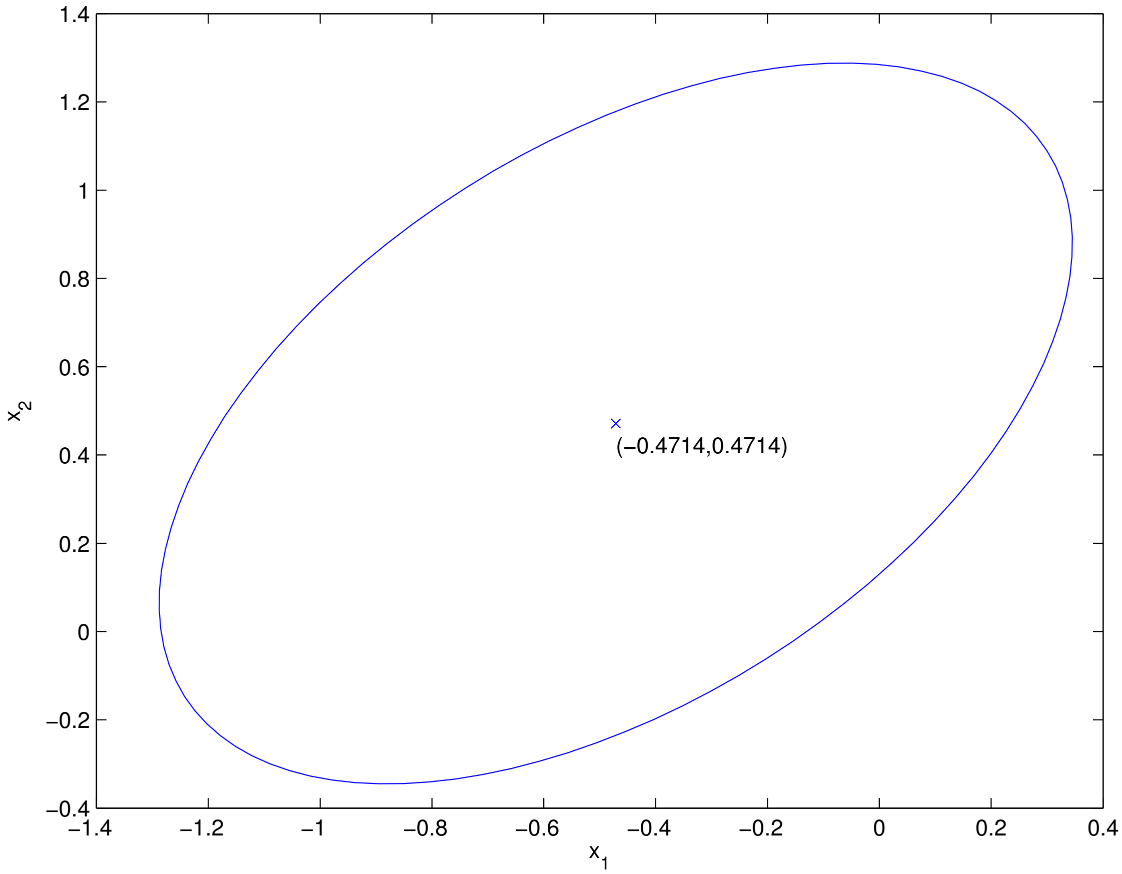

Abbildung 1: Skizze zur Aufgabe H21

Folglich ist die Lösungsmenge eine *Ellipse*. Bezüglich der z-Koordinaten liegt das Zentrum im Nullpunkt. Daher liegt es bezüglich der y-Koordinaten im Punkt $(0, \frac{2}{3})$ und der x-Koordinaten im Punkt $(-\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3})$. Die Vektoren e_1 und e_2 geben die Richtung der Achsen der Ellipse an. Die Halbachsen haben die Länge 1 und $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Skizze siehe Abbildung.