Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
8./9./13. Mai

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Multiple Choice)

(a) Welche der folgenden Aussagen über algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten sind wahr?

- ☐ algebraische Vielfachheit $\leq$ geometrische Vielfachheit
- ☒ geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit
- ☒ Falls das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix in Linearfaktoren zerfällt, und die algebraische Vielfachheit für alle Eigenwerte der geometrischen Vielfachheit entspricht, dann ist die Matrix diagonalisierbar.
- ☒ Für jeden Eigenwert einer quadratischen Matrix ist die geometrische Vielfachheit mindestens 1.

(b) Finden Sie in Ihrem Skript die Definition für eine Bilinearform. Entscheiden Sie nun, welche der angegebenen Funktionen $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Bilinearformen sind.

- ☐ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1^2 + w_2v_2 + 3w_1$
- ☒ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1w_1 + v_2w_2$
- ☐ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1v_2w_1w_2$
- ☒ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = 5v_1w_1 + v_1w_2 + 3v_2w_2$

Aufgabe G18 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Für $a = 2$ und $a = -2$ betrachten wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne in beiden Fällen die Eigenwerte der Matrix. Hier kann es hilfreich sein, a zunächst als Parameter in die Rechnung eingehen zu lassen.

(b) Im Fall $a = 2$ bestizt A Eigenvektoren, die eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bilden, d.h. sie haben jeweils Länge 1 und sie stehen paarweise senkrecht aufeinander. Bestimme eine solche Basis und verifiziere, dass für die Matrix $U = (u_1, u_2, u_3)$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

gilt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind. (Beachte, dass Matrizen, deren Spaltenvektoren Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, orthogonale Matrizen sind, d.h. es gilt $U^{-1} = U^T$.)

(c) Gibt es auch im Fall $a = -2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A?

Lösung:

(a) Es ist

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1-\lambda & 0 \\ 0 & a-2 & a-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (a-\lambda)(\lambda^2 - 1 - 3) = (a-\lambda)(\lambda^2 - 4) = (a-\lambda)(\lambda-2)(\lambda+2).$$

Damit sind die Eigenwerte: $2, -2$ und a, also haben wir in beiden Fällen die Eigenwerte 2 und -2.

(b) Wir bestimmen Eigenvektoren für $a = 2$

<u>zu $\lambda_1 = 2$:</u>

$$A - 2E = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+(\sqrt{3}II)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$(A - 2E) = 0$ hat also die Lösungen

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Damit sind $v_1 = (1, \sqrt{3}, 0)^T$ und $v_2 = (0, 0, 1)^T$ Eigenvektoren von A zum Eigenwert 2.

<u>zu $\lambda_2 = -2$:</u>

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{I+I(-\sqrt{3}I)} \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$(A + 2E)x = 0$ hat also die Lösungen $\lambda(\sqrt{3}, -1, 0)^T, \lambda \in \mathbb{R}$.

Damit ist $v_3 = (\sqrt{3}, -1, 0)^T$ Eigenvektor von A zum Eigenwert -2. Freundlicherweise stehen v_1, v_2, v_3 schon paarweise senkrecht aufeinander. Wir müssen nur noch normieren und erhalten:

$$u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nun ist $U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $U^{-1} = U^T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Damit gilt

$$\begin{aligned} U^{-1}AU &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ \sqrt{3} & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ -2\sqrt{3} & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(c) Für $a = -2$ ist $\lambda = 2$ eine einfache Nullstelle von $\det(A - \lambda I)$. Der zugehörige Eigenraum ist also eindimensional. Damit eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren existiert muss also der Eigenraum zur doppelten Nullstelle $\lambda = -2$ zweidimensional sein. Wir bestimmen Rang$(A + 2E)$ durch Spaltenumformung $II = II + (-\sqrt{3}I)$:

$$A + 2E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 3 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Also ist Rang$(A + 2E)$=2, damit ist dim(Kern$(A + 2E)$)=1, der Eigenraum also nur eindimensional und wir haben keine solche Basis.

Aufgabe G19 (Gram-Schmidt Orthogonalisierung)

Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Konstruiere eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeige, daß der Vektor $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}^T$ in der lineare Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil (a) konstruierten Basis dar.

Lösung:

(a) Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt ergeben sich die folgenden

Schritte:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2+1^2+1^2+1^2}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1\rangle v_1 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^T - \left(\frac12+\frac12\right)\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac14+\frac14+\frac14+\frac14}}\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1\rangle v_1 - \langle b_3, v_2\rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix}2 & 1 & 1 & 2\end{pmatrix}^T - \left(1+\frac12+\frac12+1\right)\begin{pmatrix}\frac12 & \frac12 & \frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T - \left(1-\frac12+\frac12-1\right)\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & \frac12 & -\frac12\end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T \\
v_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac14+\frac14+\frac14+\frac14}}\begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}\frac12 & -\frac12 & -\frac12 & \frac12\end{pmatrix}^T
\end{aligned}
$$

Folglich ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Um nachzuweisen, daß v in $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt, berechnen wir den Anteil von v der nicht in $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt:

$$v - \langle v, v_1\rangle v_1 - \langle v, v_2\rangle v_2 - \langle v, v_3\rangle v_3 = v - 2v_1 + 3v_2 - 4v_3 = 0 \tag{1}$$

Da der Anteil von v außerhalb von $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ verschwindet, liegt v in $\text{lin}(b_1, b_2, b_3)$ und aus Gleichung (1)ergibt sich sofort die gesuchte Linearkombination:

$$v = 2v_1 - 3v_2 + 4v_3.$$

Eine weitere Lösungsmöglichkeit ist natürlich das Lösen der entsprechenden Gleichungssysteme zur Darstellung eines Vektors als Linearkombination von anderen Vektoren.

Hausübung

Aufgabe H16 (Lineare Abbildungen und zugehörige Eigenwerte und Eigenräume) (6 Punkte)

Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Wie sehen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden linearen Abbildungen aus:

(a) Spiegelung an der von u und v aufgespannten Ebene,

(b) orthogonale Projektion auf die von u und v aufgespannte Ebene,

(c) Drehung um die Achse, die von v erzeugt wird.

Beachten Sie in (c) die Unterschiede je nach Drehwinkel.

Lösung: Sei E die von u und v aufgespannte Ebene.

(a) Da alle Vektoren aus E durch die Spiegelung nicht verändert werden, sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und E der zugehörige Eigenraum. Vektoren, die senkrecht zur Ebene sind, werden durch die Spiegelung auf ihr negatives abgebildet. Folglich sind sie Eigenvektoren zum Eigenwert -1 und alle orthogonalen Vektoren zu E bilden den zugehörigen Eigenraum.

(b) Da alle Vektoren aus E durch die Projektion nicht verändert werden, sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und E der zugehörige Eigenraum. Vektoren, die senkrecht zur Ebene sind, werden durch die Projektion auf den Nullvektor abgebildet. Folglich sind sie Eigenvektoren zum Eigenwert 0 und alle orthogonalen Vektoren zu E bilden den zugehörigen Eigenraum.

(c) Sei G die von v erzeugte Gerade. Da alle Vektoren auf der Drehachse durch die Drehung nicht verändert werden sind diese Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und G der zugehörige Eigenraum.

Sei $\alpha \in [0, 2\pi)$ der Drehwinkel.

Für $\alpha = 0$ handelt es sich um die Identität. Folglich sind alle Vektoren Eigenvektoren zum Eigenwert 1 und $\mathbb{R}^3$ der zugehörige Eigenraum.

Für $\alpha = \pi$ handelt es sich um eine Spiegelung an der Geraden. Folglich sind alle Vektoren, die senkrecht zu G sind, Eigenvektoren zum Eigenwert -1 und die zu G orthogonalen Vektoren sind der zugehörige Eigenraum.

Für alle anderen α gibt es keine Eigenvektoren außerhalb der Drehachse.

Aufgabe H17 (Diagonalähnliche Matrix, Diagonalisieren) (5 Punkte)

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, so daß $D = T^{-1}AT$.

Lösung:

Berechne zunächst die Eigenwerte von A.

Charakteristisches Polynom von A:

$$p_A(\lambda) = Det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 6 & 3 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & -6 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(3-\lambda)^2$$

Also sind $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_{2,3} = 3$ die Eigenwerte von A.

Wir berechnen die zugehörigen Eigenvektoren.

Zunächst der Eigenvektor v_1 zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Also gilt $v_{12} = 0$ und $v_{11} = -v_{13}$, somit erhalten wir

$$v_1 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Für Eigenvektoren v_i zu $\lambda_{2,3}$ muß gelten:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & 0 \end{array}\right), \quad \text{also} \quad 2v_{i2} + v_{i3} = 0$$

Wir wählen

$$v_2 = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 = r \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Seien nun

$$T = (v_1, v_2, v_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt nach Satz 6.11 im Skript: $T^{-1}AT = D$.

Aufgabe H18 (Orthonormalbasis, Gram-Schmidt) (4 Punkte)

Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Offensichtlich gilt $v_3 = 2v_2$. Daher ist $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4) = \mathrm{lin}(v_1, v_2, v_4)$. Mit dem Orthonormalisierungsverfahren nach Gram-Schmidt kann aus v_1, v_2, v_4 eine Orthonormalbasis für $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_4)$ bestimmt werden. (Ob v_1, v_2, v_4 linear unabhängig sind, kann im Verlauf des Verfahrens festgestellt werden.) Es ergeben sich die folgenden Schritte:

$$\begin{aligned}
u_1 &= v_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \\
b_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_2 &= v_2 - \langle v_2, b_1 \rangle b_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T \\
b_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_3 &= v_4 - \langle v_4, b_1 \rangle b_1 - \langle v_4, b_2 \rangle b_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T \\
b_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T
\end{aligned}$$

Folglich ist (b_1, b_2, b_3) eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_4)$.