Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2008
30.April/2./5. Mai

5. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Arbeitseinstellung

Aus gegebenem Anlass möchten wir (als Veranstalter) Sie an dieser Stelle über unsere Erwartungen an Sie in Kenntnis setzen. Vieles von dem, was wir hier schreiben, sahen wir eigentlich als selbverständlich an, doch offensichtlich ist es dies nicht.
Unsere Veranstaltung besteht aus **Vorlesung**, **Übung** und **Selbststudium**.
Allgemeine Erklärungen zu den Lehr- und Lernformen an der Universität finden Sie in Ihrer Studienordnung (hier wurde stellvertretend jene der Bauingenieure gewählt) auf Seite 4-5 auf folgender Webseite: `http://www.tu-darmstadt.de/fb/bi/fbbi/download/BachelorStud.pdf`.
Zur *Vorlesung* ist zu sagen, dass wir und auch Ihre Mitstudierenden, die sich bei uns beklagen, den Lärmpegel für deutlich zu hoch halten. Es ist sehr müßig, Sie regelmäßig zur Ruhe zu bitten. Tun Sie sich selbst und Ihren Kommilitonen einen Gefallen und besuchen Sie die Vorlesung nur, wenn Sie aufmerksam folgen möchten. Verlassen Sie bitte den Saal, falls Sie eine Unterhaltung mit Ihrem Nachbarn für sinnvoller halten, als der Vorlesung zu folgen. Falls Sie während der Vorlesung nicht folgen können, oder sich aus einem anderen Grund Fragen ergeben, richten Sie diese bitte an den Dozenten. Sie werden gerne beantwortet.
In den *Übungen* sollen Sie sich mit dem in der Vorlesung behandelten Stoff anhand von Aufgaben auseinander setzen. Sie erhalten also Gelegenheit zur eigenständigen Anwendung des Stoffs um dadurch Ihren Wissensstand kontinuierlich überprüfen zu können. Damit dies überhaupt möglich ist, erwarten wir von Ihnen,

- dass Sie wissen, welche Themen in der Vorlesung behandelt wurden.
- dass Sie die entsprechenden Seiten im Skript gelesen und bearbeitet (z.B. markiert oder mit Notizen versehen) haben.
- dass Sie das Skript, mit dem Sie arbeiten, mitbringen.
- dass Sie mit der Intention in die Übung kommen, arbeiten und etwas lernen zu wollen.

Die Präsenzzeit in der Gruppenübung ist nicht zur Bearbeitung der Hausaufgaben gedacht. Wir versuchen die Gruppenübungen so zu gestalten, dass Sie auf die Hausübungen vorbereiten, welche Sie eigenständig lösen sollen. Wir begrüßen Gruppenarbeit, jedoch nicht das 1:1 Abschreiben von Lösungen. Jeder sollte seinen eigenen Lösungsweg selbst in eigenen Worten dokumentieren und abgeben.
Falls bei der Bearbeitung von Hausübungen Probleme auftauchen sollten, stehen Ihnen alle Tutoren

in ihren jeweiligen **Sprechstunden** zur Verfügung. Diese sind zur Zeit noch nicht sehr gut besucht. Wie Sie auf der Webseite:

http://www.tu-darmstadt.de/fb/bi/fbbi/download/BScAnhang_III_Modulbeschreibungen.pdf

nachlesen können, sind pro Semester für Vor- und Nachbereitung (ohne Hausübungen) 135 Stunden Ihrer Arbeitszeit veranschlagt. Zieht man etwa 35 Stunden für die Klausurvorbereitung ab, so bleiben immernoch 100 Stunden in 14 Semesterwochen. Das heißt, von offizieller Seite wird von Ihnen mehr als 6 Stunden Eigenarbeit neben den Hausübungen erwartet.
Falls Sie Anregungen zur Verbesserung unserer Lehre haben, teilen Sie uns diese bitte mit. Wir haben für Sie einige Kontrollaussagen zusammengestellt, anhand welcher Sie sich klar werden können, ob Sie auf dem Stand der Veranstaltung sind.

Kontrollaussagen

Falls Sie einer Aussage nicht zustimmen können, arbeiten Sie mit Hilfe des Skriptes und der Literaturhinweise nach! Im Meyberg-Vachenauer befinden wir uns gerade in Kapitel 6: Lineare Algebra.

- Ich weiß, was ein Vektorraum ist.
- Ich kann nachweisen, ob eine gegebene Menge ein Vektorraum ist.
- Ich kenne Beispiele für Vektorräume, auch andere als den $\mathbb{R}^3$.
- Ich kann für einen gegebene Menge nachprüfen, ob sie ein Untervektorraum eines gegebenen Vektorraums ist.
- Ich weiß, was ein Erzeugendensystem eines Vektorraums ist.
- Ich kann prüfen, ob einen gegebene Menge von Vektoren ein Erzeugendensystem eines Vektorraums ist.
- Ich kann die lineare Hülle einer Menge von Vektoren bilden.
- Ich kann nachprüfen, ob eine gegebene Menge von Vektoren linear unabhängig ist.
- Ich habe verstanden, was eine Basis eines Vektorraums ist.
- Ich kann überprüfen, ob einen gegebene Menge von Vektoren eine Basis eines Vektorraums ist.
- Ich kenne den Begriff der Dimension und kann die Dimension eines (Unter-)Vektorraums bestimmen.
- Ich kann lineare Gleichungssysteme mit dem Gauß-Jordan-Eliminationsalgorithmus korrekt lösen.
- Ich weiß, was eine Matrix ist.
- Ich kenne den Zusammenhang zwischen der Lösbarkeit von linearen Gleichungssystemen und dem Rang der zugehörigen Matrizen.
- Ich weiß, was eine lineare Abbildung ist.
- Ich kann effizient prüfen, ob eine Abbildung linear ist.

- Ich weiß, wie ich eine, von einer Basis abhängige, Abbildungsmatrix zu einer linearen Abbildung finde.
- Ich kann einen Wechsel von einer in eine andere Basis durchführen.
- Ich kenne die Determinantenabbildung und kann auf verschiedene Weisen geschickt die Determinante einer Matrix bestimmen.
- Ich weiß, was Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen sind und habe eine geometrische Vorstellung dazu.
- Ich kann die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren einer Matrix berechnen.
- Ich weiß mit den Begriffen “algebraische” und “geometrische” Vielfachheit umzugehen.
- Ich weiß, wie ich zu einer gegebenen Matrix eine Basis suchen kann, in welcher die Matrix, wenn möglich, Diagonalgestalt annimmt.

Gruppenübung

Aufgabe G13 (Multiple Choice)

(a) Welche der folgenden Aussagen über das Berechnen von Determinanten von Matrizen sind wahr?

☐ $\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$, für A und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

☒ $\det(A\cdot B) = \det(A)\cdot\det(B)$, für A und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

☒ $\det(A^n) = (\det(A))^n$, für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

☒ $\det(A\cdot B^{-1}) = \frac{\det(A)}{\det(B)}$, für A und $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ wobei B invertierbar ist

☐ $\det(5\cdot A) = 5\cdot\det(A)$, für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

(b) Welche der Vektoren b sind Eigenvektoren der zugehörigen Matrix A?

☐ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

☒ $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

☒ $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

☐ $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

☒ $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Aufgabe G14 (Determinanten)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Determinanten von A, B und C und bestimmen Sie $\det(A \cdot B)$ sowie $\det(A - C)$. Gehen Sie hierbei möglichst geschickt vor. Welche dieser Matrizen sind invertierbar, welche nicht?

Lösung: Determinanten

Zur Bestimmung der Determinante der Matrix A verwenden wir die *Entwicklung nach der ersten Spalte*

$$\det A = \sum_{\mu=1}^{4} (-1)^{\mu+1} \cdot \widetilde{A}_{\mu 1} \cdot a_{\mu 1}.$$

Wegen

$$a_{21} = a_{31} = a_{41} = 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = 1 \neq 0$$

genügt es den Minor $\widetilde{A}_{11}$ zu berechnen:

$$\widetilde{A}_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot 6 - 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 8 \cdot 6 - 4 \cdot 2 \cdot 9$$
$$= 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0.$$

Damit folgt

$$\det A = \sum_{\mu=1}^{4} (-1)^{\mu+1} \cdot \widetilde{A}_{\mu 1} \cdot a_{\mu 1} = (-1)^2 \cdot \widetilde{A}_{11} \cdot a_{11} = 1 \cdot 0 \cdot 1 = 0.$$

Die Berechnung der Determinante der Matrix B kann auf eine analoge Weise erfolgen. Zuvor ist es jedoch sinnvoll, die Umformung

$$(\mathrm{Z2}) + (-2) \cdot (\mathrm{Z1})$$

vorzunehmen, die auf die Matrix

$$B' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

führt, welche gemäß der Eigenschaft (D6) aus dem Skript die gleiche Determinante wie die Matrix B besitzt. Für die *Entwicklung nach der zweiten Zeile* genügt es wegen

$$b'_{22} = b'_{23} = b'_{24} = 0 \quad \text{und} \quad b'_{21} = 1 \neq 0$$

den Minor

$$\widetilde{B}'_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 \cdot 8$$
$$- 0 \cdot 7 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 8 - 6 \cdot 0 \cdot 2 = 28 - 16 = 12$$

zu betrachten, womit dann

$$\det B = \det B' = \sum_{\nu=1}^{4} (-1)^{2+\nu} \cdot \widetilde{B}'_{2\nu} \cdot b'_{2\nu} = (-1)^{2+1} \cdot \widetilde{B}'_{21} \cdot b'_{21} = (-1)^3 \cdot 12 \cdot 1 = -12$$

folgt.

Es ist auch möglich die Blockstruktur der Matrix B zu nutzen um die Determinante zu berechnen. Wir nutzen die Eigenschaften (D4) und (D12) aus dem Skript. Es ergibt sich:

$$\det(B) = \det(B^T) = \det\left(\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}\right) \cdot \det\left(\begin{pmatrix}7 & 1\\ 8 & 2\end{pmatrix}\right) = -2 \cdot 6 = -12$$

Die Determinante der Matrix C könnte wie zuvor durch eine *Entwicklung nach der dritten Zeile* ermittelt werden. Da aber die erste und die vierte Zeile von C übereinstimmen, ist

$$\det C = 0$$

nach Eigenschaft D2 auf S.49 im Skript.

Schließlich erhalten wir noch

$$\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 0 \cdot (-12) = 0$$

und

$$\det(A - C) = 0,$$

wobei sich letztere Aussage aufgrund der Übereinstimmung der ersten Zeilenvektoren von A und C ergibt, die bei der Differenzbildung $A-C$ auf eine Nullzeile führen, was nach Satz 11.2 auf S.47 a.a.O. gleichbedeutend damit ist, das die Determinante der Matrix $A - C$ verschwindet.

Zusammenfassend läßt sich somit feststellen, daß nur die Matrix B *regulär* ist, während die Matrizen A, C, $A \cdot B$ und $A - B$ *singulär* sind, da ihre Determinanten jeweils den Wert Null annehmen.

Aufgabe G15 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Bestimme die Eigenwerte und alle zugehörigen Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix}1 & -3 & 3\\ 3 & -5 & 3\\ 6 & -6 & 4\end{pmatrix}.$$

Lösung: $\begin{vmatrix}1-\lambda & -3 & 3\\ 3 & -5-\lambda & 3\\ 6 & -6 & 4-\lambda\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1-\lambda & -2-\lambda & 3\\ 3 & -2-\lambda & 3\\ 6 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (-2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 3\\ 3 & 1 & 3\\ 6 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 6 & 0 & 4-\lambda\end{vmatrix} = (-2-\lambda)(4-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}$

$= (-2-\lambda)(4-\lambda)(1-\lambda-3) = (-2-\lambda)^2(4-\lambda)$

Also sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 4$ Eigenwerte.

Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -2$:

$$\begin{pmatrix}3 & -3 & 3\\ 3 & -3 & 3\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-II),III+(-2II)} \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & -3 & 3\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Alle Vektoren der Form $\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \cdot \mu \neq 0$, sind Eigenvektoren.

Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{pmatrix}-3 & -3 & 3\\ 3 & -9 & 3\\ 6 & -6 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{I+(-III),II+(-III)} \begin{pmatrix}0 & 2 & -1\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Setze $x_2 = \lambda \Rightarrow x_3 = 2\lambda$ und $x_1 = \lambda$.
Also sind alle Vektoren der Form $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, Eigenvektoren.

Aufgabe G16 (Basistransformation)
Wir betrachten nochmals die Matrix aus Aufgabenteil (a) der vorhergegangenen Übungsaufgabe (G15). Sie haben bereits die Eigenvektoren dieser Matrix berechnet. Bilden Sie nun eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus diesen Eigenvektoren und führen Sie eine Basistransformation der Matrix in diese Basis durch. Geben Sie sowohl die Transformationsmatrizen, als auch die entstehende Matrix an. Was stellen Sie fest?

Lösung: Hier wählen wir, die bereits in Aufgabe G15 berechneten Vektoren als Basis $B = \{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.Um eine Basistransformation durchzuführen, suchen wir zunächste die Transformationsmatrizen, S und S^{-1}. S soll hier die Matrix sein, die von der Basis B in die Standardbasis transformiert und S^{-1} transformiert, genau umgekehrt, von der Standardbasis in die Basis B. Es gilt

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Durch Berechnung der Inversen mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus erhält man:

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Nun berechnen wir die transformierte Matrix:

$$S^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix} S = S^{-1} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Es fällt auf, dass die Matrix nun eine Diagonalgestalt besitzt. Auf der Diagonalen stehen die Eigenwerte der Matrix, jeweils in ihrer algebraischen Vielfachheit.

Hausübung

Aufgabe H13 (Determinanten) (4 Punkte)
Berechne die Determinanten der Matrizen möglichst geschickt

$$A = \begin{pmatrix} 1-i & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3i & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & i \\ 1+i & -1 & i & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Entwicklung nach der dritten Spalte und anschließend nach der zweiten Zeile ergibt:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1-i & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 3i & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & i \\ 1+i & -1 & i & 2 \end{vmatrix} = -i \cdot \begin{vmatrix} 1-i & 4 & 1 \\ 0 & 3i & 0 \\ 1 & 2 & i \end{vmatrix} = -i \cdot 3i \cdot \begin{vmatrix} 1-i & 1 \\ 1 & i \end{vmatrix} = 3((1-i)i-1) = 3i.$$

Nach Eigenschaften D4 und D12 gilt

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 7 = (1+1)\cdot(2+0-9-0-1+6)\cdot 7 = -28.$$

Aufgabe H14 (Eigenwerte und Eigenvektoren) (6 Punkte)

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -1+i \\ 0 & -1-i & 7 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ -26 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die charakteristischen Polynome $P_A(\lambda)$ und $P_B(\lambda)$.

(b) Ermitteln Sie nun die Eigenwerte und die zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen A und B.

Lösung: Eigenwerte und Eigenvektoren

(a) Für das charakteristische Polynom der Matrix A erhalten wir

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \det(A-\lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 8-\lambda & -1+i \\ 0 & -1-i & 7-\lambda \end{vmatrix} \\ &= [(3-\lambda)(8-\lambda)(7-\lambda) - (3-\lambda)(-1-i)(-1+i)] \\ &= (3-\lambda)\cdot[(8-\lambda)(7-\lambda) - (-1-i)(-1+i)] \\ &= (3-\lambda)\cdot[\lambda^2 - 15\lambda + 54] \\ &= (3-\lambda)\cdot(\lambda-6)\cdot(\lambda-9) \end{aligned}$$

und für das charakteristische Polynom der Matrix B ergibt sich

$$\begin{aligned} P_B(\lambda) &= \det(B-\lambda I) \\ &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ -26 & 3-\lambda & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1-\lambda & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 & 1 \\ -26 & 3-\lambda & 5 \\ 2 & -3 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot (-1-\lambda) \\ &= [(-4-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda) + 78 - 2(3-\lambda) + 15(-4-\lambda)]\cdot(-1-\lambda) \\ &= [-\lambda^3 + 13\lambda - 12 + 78 - 6 + 2\lambda - 60 - 15\lambda]\cdot(-1-\lambda) \\ &= \lambda^3(1+\lambda). \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die *charakteristischen Polynome*

$$P_A(\lambda) = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 \qquad \text{und} \qquad P_B(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3.$$

(b) (i) Nach Satz 6.9 auf S.62 im Skript stimmen die Eigenwerte von A mit den Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P_A(\lambda)$ überein. Wegen

$$\begin{aligned} P_A(\lambda) &= \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 \\ &= (-1) \cdot (3 - \lambda) \cdot (\lambda - 6) \cdot (\lambda - 9) \end{aligned}$$

sind

$$\lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = 6 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 9$$

die *Eigenwerte* der Matrix A. Als nächstes sind nun die zugehörigen Eigenvektoren zu bestimmen, wozu wir die folgenden Fälle unterscheiden:

$\underline{\lambda_1 = 3}$: Wie auch im Skript Schritt 2 Seite 64 sind die Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$ die nichttrivialen Lösungen des Gleichungssystems

$$(A - 3I) \cdot x_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \text{-1+i} \\ 0 & \text{-1-i} & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da der (vom Nullvektor verschiedene) Vektor

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

obiges Gleichungssystem löst und da nach Satz 6.10 im Skript, die geometrische Vielfachheit eines Eigenwertes höchstens seiner algebraischen entspricht, bildet

$$EV_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \; : \; s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

die *Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 3$.*

$\underline{\lambda_2 = 6}$: In diesem Fall führt Schritt 2 auf S.64 im Skript auf das Gleichungssystem

$$(A - 6I) \cdot x_2 = \begin{pmatrix} \text{- 3} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & \text{-1+i} \\ 0 & \text{-1-i} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dessen Lösungen mit dem *Gauß-Jordan-Verfahren* zu bestimmen sind:

	-3	0	0	0
	0	2	-1+i	0
	0	-1-i	1	0
Z1$\cdot$ $\left(-\frac{1}{3}\right)$	1	0	0	0
	0	2	-1+i	0
Z3$\cdot$(-1 + i)	0	2	-1+i	0
	1	0	0	0
	0	2	-1+i	0
Z3+(-1)$\cdot$Z2	0	0	0	0
	1	0	0	0
Z2$\cdot$ $\left(\frac{1}{2}\right)$	0	1	$\frac{-1+i}{2}$	0
	0	0	0	0

Wir können nun $x_{2,3} = s$ frei wählen und mit

$$x_{2,2} = \frac{1-i}{2} \cdot x_{2,3} = \frac{1-i}{2} \cdot s$$

sowie

$$x_{2,1} = 0$$

bildet

$$EV_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1-i}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

die *Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert* $\lambda_2 = 6$.

$\underline{\lambda_3 = 9:}$ Hier ist das Gleichungssystem

$$(A - 9I) \cdot x_3 = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1+i \\ 0 & -1-i & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

zu betrachten. Mit dem *Gauß-Jordan-Verfahren* folgt

	-6	0	0	0
	0	-1	-1+i	0
	0	-1-i	-2	0
Z1$\cdot$ (-$\frac{1}{6}$)	1	0	0	0
	0	-1	-1+i	0
Z3$\cdot$(i-1)	0	2	2-2i	0
	1	0	0	0
	0	-1	-1+i	0
Z3+2$\cdot$Z2	0	0	0	0
	1	0	0	0
Z2$\cdot$(-1)	0	1	1-i	0
	0	0	0	0

Somit läßt sich $x_{3,3} = s$ frei wählen und mit

$$x_{3,2} = -(1-i) \cdot s = (i-1) \cdot s$$

sowie

$$x_{3,1} = 0$$

erhalten wir mit

$$EV_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_{3,1} \\ x_{3,2} \\ x_{3,3} \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ i-1 \\ 1 \end{pmatrix} \; : \; s \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}$$

die *Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert* $\lambda_3 = 9$.

(ii) Nach dem Aufgabenteil (a) gilt

$$P_B(\lambda) = \lambda^4 + \lambda^3 = \lambda^3(1+\lambda)$$

und somit sind

$$\lambda_1 = 0 \qquad \text{und} \qquad \lambda_2 = -1$$

die *Eigenwerte* der Matrix B, weshalb wir zur Bestimmung der Eigenvektoren die beiden folgenden Fälle betrachten:

$\underline{\lambda_1 = 0:}$ Hier ist das Gleichungssystem

$$(B - 0I) \cdot x_1 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 & 1 \\ -26 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ x_{1,3} \\ x_{1,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu untersuchen, wozu wir erneut das Gauß-Jordan-Verfahren bemühen:

	-4	0	0	1	0
	-26	3	0	5	0
	0	0	-1	0	0
	2	-3	0	1	0
	-4	0	0	1	0
Z2·2	-52	6	0	10	0
	0	0	-1	0	0
Z4·2	4	-6	0	2	0
	-4	0	0	1	0
Z2+(-13)·Z1	0	6	0	-3	0
Z1·(-1)	0	0	1	0	0
Z4+Z1	0	-6	0	3	0
	-4	0	0	1	0
	0	6	0	-3	0
	0	0	1	0	0
Z4+Z2	0	0	0	0	0
Z1· $\left(-\frac{1}{4}\right)$	1	0	0	$-\frac{1}{4}$	0
Z2· $\left(\frac{1}{6}\right)$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0
	0	0	1	0	0
	0	0	0	0	0

Damit ist $x_{1,4} = s$ frei wählbar und wir erhalten

$$\begin{aligned} x_{1,3} &= 0, \\ x_{1,2} &= \frac{1}{2} x_{1,4} = \frac{1}{2} s, \\ x_{1,1} &= \frac{1}{4} x_{1,4} = \frac{1}{4} s. \end{aligned}$$

Damit ist die *Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$* durch

$$EV_1 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ : \ s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$$

gegeben.

$\underline{\lambda_2 = -1:}$ In diesem Fall ist das Gleichungssystem

$$(B - (-1)I) \cdot x_2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 1 \\ -26 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \\ x_{2,3} \\ x_{2,4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu betrachten. Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren folgt

	-3	0	0	1	0
	-26	4	0	5	0
	0	0	0	0	0
	2	-3	0	2	0
	-3	0	0	1	0
Z2·3	-78	12	0	15	0
	0	0	0	0	0
Z4·3	6	-9	0	6	0
	-3	0	0	1	0
Z2+(-26)·Z1	0	12	0	-11	0
	0	0	0	0	0
Z4+2·Z1	0	-9	0	8	0
	-3	0	0	1	0
Z2·3	0	36	0	-33	0
	0	0	0	0	0
Z4·4	0	-36	0	32	0
	-3	0	0	1	0
	0	36	0	-33	0
	0	0	0	0	0
Z4+Z2	0	0	0	-1	0
Z1+Z4	-3	0	0	0	0
Z2+(-33)·Z4	0	36	0	0	0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	-1	0
Z1· $\left(-\frac{1}{3}\right)$	1	0	0	0	0
Z2· $\frac{1}{36}$	0	1	0	0	0
	0	0	0	0	0
Z4·(-1)	0	0	0	1	0

Damit ist $x_{2,3} = s$ frei wählbar und mit

$$x_{2,1} = x_{2,2} = x_{2,4} = 0$$

erhalten wir

$$EV_2 = \left\{ s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\},$$

womit nun auch die Menge der *Eigenvektoren zum Eigenwert* $\lambda_2 = -1$ bestimmt ist.

■

Aufgabe H15 (Basistransformation) (5 Punkte)

Die lineare Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ sei durch die Darstellungsmatrix

$$[f]_E = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

(bezüglich der Standardbasis $E = (e_1, e_2, e_3)$) gegeben.
Bestimme die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

Lösung: Sei

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dann ist S die Darstellungsmatrix der linearen Abbildung, die Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B auf Koordinatenvektoren bezüglich der Standardbasis E abbildet. Dann folgt für die Darstellungsmatrix $[f]_B$ von f bezüglich der Basis B

$$[f]_B = S^{-1}[f]_E S.$$

Es ist zunächst die Inverse von S zu berechnen:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{II-I \\ III-2I}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{II\leftrightarrow III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\overset{-\frac{1}{2}II}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \overset{\substack{I-II \\ III+3II}}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \overset{\frac{1}{2}III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{array}\right)$$

$$\overset{I+III}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{array}\right).$$

Folglich gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} [f]_B = S^{-1}[f]_E S &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 6 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$