Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
24./25./28. April

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Multiple Choice)

Bei den folgenden Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein.

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen U_i, $i = 1, \ldots, 5$, Untervektorräume der Vektorräume V_i, $i = 1, \ldots, 5$, sind.

- ☒ $V_1 = \mathbb{R}^3, U_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : u_1 = u_2 = u_3 = 0\}$
- ☐ $V_2 = \mathbb{R}^2, U_2 = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$
- ☐ $V_3 = \mathbb{R}^2, U_3 = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{u} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}\right\}$
- ☐ $V_4 = \mathbb{R}^3, U_4 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : 3u_3 = 2(u_1 - u_2) + 5\}$
- ☒ $V_5 = \mathbb{R}^3, U_5 = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : 0 = \left[\vec{u} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Jeder Vektorraum V besitzt nur eine Basis.
- ☒ Jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Matrix bezüglich der Standardbasis.
- ☒ Eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor immer auf den Nullvektor ab.
- ☐ Die Basis eines Vektorraums ist nicht immer ein Erzeugendensystem für den Vektorraum.
- ☒ Die Summe zweier symmetrischer Matrizen gleicher Dimension ist wieder eine symmetrische Matrix.
- ☐ Eine Matrix A für die das Gleichungssystem $A\vec{x} = 0$ eine andere Lösung als $\vec{x} = \vec{0}$ ist invertierbar.

(c) Prüfen Sie, welche der folgenden Matrizen zu den beschriebenen linearen Abbildungen gehören.

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist bezüglich der Standardbasis eine Projektion auf die x-Achse.

☒ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ bildet den ersten Basisvektor auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und den zweiten Basisvektor auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ab.

☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist bezüglich der Standardbasis eine Projektion auf x- und y-Achse.

☒ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist bezüglich der Standardbasis eine Projektion auf die Gerade im $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung $x = y$.

Lösung:

(a) (i) $\vec{0}$ ist immer ein Untervektorraum

(ii) U_2 ist ein Kreis mit folgender Kreisgleichung

$$(u_1 - 2)^2 + (u_2 - 1)^2 = 4.$$

Da $(0,0)^T \notin U_2$, ist U_2 kein Untervektorraum.

(iii) Sei $\vec{u}_1 = (2,3)^T$ und $\vec{u}_2 = (3,-2)^T$, dann gilt $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = (5,1)^T$, aber es gibt kein $r, s \in \mathbb{R}$ mit $r \cdot (2,3)^T = (5,1)^T$ oder $s \cdot (3,-2)^T = (5,1)^T$. U_3 ist demnach kein Untervektorraum.

(iv) $(0,0,0)^T \notin U_4$, d.h. U_4 ist kein Untervektorraum.

(v) $\vec{0} \in U_5$, da

$$\left[\vec{0} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0.$$

Weiterhin gilt, dass die charakterisierende Gleichung der Menge die Form einer Ebenengleichung hat. Ebenen, die den Ursprung enthalten, sind Untervektorräume des $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G10 (Lineare Abbildungen)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben. Untersuche die folgenden Abbildungen jeweils auf Linearität.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (x+2, x)^T$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = a \times x$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax + b$.

Lösung:

(a) Es ist $f(0,0) = (2,0)^T$. Für jede lineare Abbildung gilt aber $f(0) = 0$ (vgl. Kap. 9 (24)), also ist f nicht linear.

(b) Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} f(\lambda x + \mu y) &= a \times (\lambda x + \mu y) = a \times (\lambda x) + a \times (\mu y) \\ &= \lambda(a \times x) + \mu(a \times y) = \lambda f(x) + \mu f(y), \end{aligned}$$

also ist f linear.

(c) Ist $b = 0$, so ist f linear: Für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt

$$f(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x) + A(\mu y) = \lambda Ax + \mu Ay \qquad = \lambda f(x) + \mu f(y),$$

nach den Rechenregeln für Matrizen, also ist f linear. Sei also $b \neq 0$. Dann ist $f(0) = b \neq 0$, also ist f in diesem Fall nicht linear.

Aufgabe G11 (Matrizen von linearen Abbildungen)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion auf die y-Achse.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Ursprung mit dem Drehwinkel $\pi/2$.
Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $h\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T\right) = 2x + 3y$.

a) Berechnen Sie die Matrizen A, B, C der linearen Abbildungen f, g, h bezüglich der kanonischen Basis.

b) Was geschieht geometrisch in einem Koordinatensystem mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ durch Hintereinanderausführung der Abbildungen f und g? Betrachten Sie sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ und interpretieren Sie Ihre Beobachtung.

c) Berechnen Sie die Matrix D, welche die lineare Abbildung $h \circ f \circ g$ beschreibt und berechnen Sie $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

a) In den Spalten der Matrix stehen jeweils die Bilder der Standardbasisvektoren. Man macht also die Überlegung, worauf die Vektoren $(1,0)^T$ und $(0,1)^T$ abgebildet werden.
$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}) & -\sin(\frac{\pi}{2}) \\ \sin(\frac{\pi}{2}) & \cos(\frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

(b) Betrachten wir zuerst $f \circ g((1,1)^T)$. Es gilt $f \circ g((1,1)^T) = f(g((1,1)^T)) = f(B \cdot (1,1)^T) = f((-1,1)^T) = A \cdot (-1,1)^T = (0,1)^T$.
Als nächstes betrachten wir $g \circ f((1,1)^T))$. Hier gilt $g \circ f((1,1)^T) = g(f((1,1)^T)) = g(A \cdot (1,1)^T) = g((0,1)^T) = B \cdot (0,1)^T = (-1,0)^T$.
Im ersten Fall wird der Vektor $(1,1)^T$ zuerst um $90°$ gegen den Uhrzeigersinn gedreht und danach auf die y -Achse projiziert. Im zweiten Fall geschieht zuerst die Projektion und danach wird um $90°$ gedreht. Unter Beachtung unserer Rechenergebnisse können wir sagen, dass es einen Unterschied macht, in welcher Reihenfolge wir die verschiedenen linearen Funktionen anwenden. Die beiden Abbildungen kommutieren also nicht.

c) Es gibt zwei Herangehensweisen, die Matrix D zu bestimmen. Entweder wir denken wieder darüber nach, wie die beiden Einheitsvektoren abgebildet werden, oder wir bilden ein Matrixprodukt der bereits ausgerechneten Matrizen. Erstes ist hier einfacher. Der erste Standardbasisvektor $(1,0)^T$ wird durch die Drehung auf die y-Achse gedreht. Das heißt im nächsten Schritt wird er durch die Projektion nicht verändert. Und zum Schluß von der Abbildung h auf 3 abgebildet.
Der zweite Standardbasisvektor wird druch die Drehung auf die x-Achse abgebildet und danach durch die Projektion auf den Nullvektor $(0,0)^T$ abgebildet. Daran verändert auch die Abbildung h nichts, das Ergbenis bleibt 0. Daraus ergibt sich als Matrix $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}$.
Als Ergebnis für $D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3$

Aufgabe G12 (Basistransformation)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Parallelprojektion π in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die durch die Gleichung $x - y + z = 0$ bestimmte Ebene. Bestimme die Matrix von π zuerst bezüglich einer „geeigneten“ Basis und dann bezüglich der kanonischen Basis.
Anmerkung: Bei einer Parallelprojektion, kann man sich vorstellen, dass die Stahlen einer Lampe aus genau einer gegebenen Richtung kommen und wir den Schatten auf einer gegebenen Ebene suchen.

Lösung: Eine geeignete Basis $\mathcal{B}$ besteht etwa aus den Vektoren $v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, denn da die beiden ersten in der Ebene, auf die projiziert wird, liegen und der letzte die Projektionsrichtung angibt, erhalten wir

$$\pi(v_1) = v_1, \qquad \pi(v_2) = v_2 \qquad \text{and} \qquad \pi(v_3) = 0$$

und somit für die Abbildung π bezüglich der Basis $\mathcal{B}$ die Matrix

$$[\pi]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der Transformationsmatrix

$$S = [\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}]^{\mathcal{B}}_{\mathbb{K}_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhalten wir wegen

$$[\pi]_{\mathbb{K}_3} = S[\pi]_{\mathcal{B}} S^{-1} \qquad \text{and} \qquad S^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

somit

$$[\pi]_{\mathbb{K}_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H10 (Lineare Abbildungen) (4 Punkte)

Sind die folgenden Abbildungen jeweils linear? Begründen Sie. Dabei seien $n, m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (2y, x + y)^T$.

(c) $f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ mit $(f(u))(x) = u'(x)$.

Kommentar zur Notation: $C^1(\mathbb{R})$) steht für den Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $C^0(\mathbb{R})$ für den Vektorraum aller stetigen Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösung:

(a) Es ist $f(1,1) = 1$, $f(2,2) = 4$.
Wäre f linear, müsste aber $f(2,2) = f(2 \cdot (1,1)) = 2 \cdot f(1,1) = 2$ gelten, also ist f nicht linear.

(b) Für alle (x_1, x_2),$(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda(x_1,x_2) + \mu(y_1,y_2)) &= f(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= (2\lambda x_2 + 2\mu y_2, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2)^T \\ &= (2\lambda x_2, \lambda(x_1 + x_2))^T + (2\mu y_2, \mu(y_1 + y_2))^T \\ &= \lambda f(x_1, x_2) + \mu f(y_1, y_2) \end{aligned}$$

$\Longrightarrow f$ ist linear

(c) Für alle $u, v \in C^1(\mathbb{R})$ und alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\begin{aligned} (f(\lambda u + \mu v))(x) &= (\lambda u + \mu v)'(x) = \lambda u'(x) + \mu v'(x) \\ &= \lambda(f(u))(x) + \mu(f(v))(x) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$,
also gilt $f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$ als Funktion.
Damit ist f linear.

Aufgabe H11 (Basis und Koordinaten von Vektoren) (7 Punkte)

Gegeben seine die Vektoren $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ und $\vec{b_3}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie die Matrizen B^{-1} und B an, mit denen die Koordinaten eines Vektors $\vec{x}$ bzgl. der Standardbasis in die Koordinaten von $\vec{x}$ bzgl. der Basis $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ transformiert werden können bzw. umgekehrt.

(c) Berechne die Koordinaten von $(2,2,3)^T$ bzgl. der Basis $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$.

(d) Es sei $\vec{v}$ der Vektor, welcher bzgl. der Basis $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ die Koordinaten $(1, 0, -1)^T_B$ besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ bzgl. der Standardbasis.

Lösung:

(a) Um zu zeigen, dass die Vektoren eine Basis bilden, müssen wir sowohl nachweisen, dass die Vektoren linear unabhängig sind und dass sie ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden. Für die Lineare Unabhängigkeit betrachten wir das Gleichungssystem $\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = 0$ welches zu folgender erweiterter Koeffizientenmatrix führt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right) \overset{2II - I}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Schon nach dem ersten Schritt lässt sich hier ablesen, dass die einzige Lösung des Gleichungssystems $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ist. Daher sind die Vektoren b_1, b_2 und b_3 linear unabhängig.

Da wir mittlerweile wissen, dass die Anzahl der Basisvektoren der Dimension des Raumes entspricht, können wir hier also auch einfach sagen, dass diese drei Vektoren den $\mathbb{R}^3$ erzeugen. Bzw. wissen wir, dass die Matrix bestehend aus den Basisvektoren vollen Rang (siehe Gauß-algorihtmus) hat und daher für jede rechte Seite das entstehende Gleichungssystem eindeutig lösbar ist.
Also ist gezeigt, dass b_1, b_2 und b_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Die Matrix B ist die einfachere um sie anzugeben. Sie transformiert einen Vektor bzgl. der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ in einen Vektor in Standardbasis. Eine solche Matrix hat immer die Vektoren der Nichtstandardbasis als Spalten. Also gilt:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

B^{-1} berechnen wir mit Hilfe des Gausalgorithmus und erhalten:

$$B^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) Um die Koordinaten des Vektors $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ bezüglich der neuen Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ anzugeben, multiplizieren wir den Vektor mit der entsprechenden Transformationsmatrix. Hier ist das B^{-1}. Es ergibt sich in diesem Fall:

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) Wir gehen genauso vor, wie in Aufgabenteil (c). Diesmal verwenden wir aber natürlich B als Transformationsmatrix, da ein Vektor bezüglich der Basis $\{b_1, b_2, b_3\}$ gegeben ist.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe H12 (Matrizen von linearen Abbildungen) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Streckung des Vektors $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ um den Faktor 5 in x-Richtung und um den Faktor 3 in y-Richtung.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $\{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$.

a) Bestimmen Sie die Matrizen der linearen Abbildungen $f, g, f \circ g, g \circ f$ bezüglich der kanonischen Basis. Was stellen Sie fest?

b) Was geschieht geometrisch durch eine Hintereinanderausführung $f \circ g$ mit dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$?

Lösung:

a) Wir betrachten für die einzelnen Abbildungen hier die Bilder der Basisvektoren und erstellen so die geforderten Matrizen. Für die Verknüpften Abbildungen haben wir jeweils die Multiplikation der entsprechenden Matrizen durchgeführt.

$[f]_{\mathbb{K}_2} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $[g]_{\mathbb{K}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $[f \circ g]_{\mathbb{K}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ und $[g \circ f]_{\mathbb{K}_2} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$
Auch hier stellen wir fest, dass die beiden Abbildungen nicht miteinander vertauschbar sind. Erklärung: Durch die Spiegelung werden gerade die beiden Koordinatenachsen aufeinander abgebildet. Also in gewissem Sinne vertauscht. Daher wirkt sich die Streckung jeweils auf die andere Achse aus, wenn man zuerst spiegelt.

b) Um zu beurteilen was geschieht, berechnen wir zunächst einfach das Bild des Vektors.

$$f \circ g(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Wie kommt dieses Ergebnis zustande? Zuerst wird die Spiegelung an der Winkelahlbierenden durchgeführt, wodurch der Vektor auf $(-1 \quad -2)^T$ abgebildet wird. Und nun werden noch die entsprechenden Streckungen in den Komponenten durchgeführt.