Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
3./4./7. April

1. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Vorspann

Herzlich Willkommen zur ersten Matheübung des Semesters!
Sie werden im ersten Teil des Semesters sehr viel mit Vektorrechnung zu tun haben. Erste Erfahrungen haben Sie damit schon im letzten Semester gesammelt. Diese gilt es nun zu vertiefen und in einen größeren Kontext zu setzen.
Diese erste Übung soll Ihnen helfen, sich an die Begriffe, die Ihnen bereits im letzten Semester vorgestellt wurden, zu erinnern.

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Orthogonalität von Vektoren)
Gegeben seien die Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Untersuchen Sie diese Vektoren hinsichtlich ihrer Orthogonalität und berechnen Sie die Längen von u_1, u_2 und u_3.

Lösung:
Zwei Vektoren heißen *orthogonal*, wenn ihr Skalarprodukt Null ist. Wegen

$$u_1 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = 5 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) + 1 \cdot 1 = 15 - 16 + 1 = 0,$$

$$u_1 \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 \cdot 1 + 4 \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 5 - 8 + 3 = 0$$

und

$$u_2 \cdot u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot 1 + (-4) \cdot (-2) + 1 \cdot 3 = 3 + 8 + 3 = 14$$

sind die Vektoren u_1 und u_2 sowie die Vektoren u_1 und u_3 *orthogonal*.

Bezüglich der Längen erhalten wir

$$\begin{aligned}
|u_1| &= \sqrt{5^2+4^2+1^2} &&= \sqrt{25+16+1} &&= \sqrt{42},\\
|u_2| &= \sqrt{3^2+(-4)^2+1^2} &&= \sqrt{9+16+1} &&= \sqrt{26},\\
|u_3| &= \sqrt{1^2+(-2)^2+3^2} &&= \sqrt{1+4+9} &&= \sqrt{14}.
\end{aligned}$$

Aufgabe G2 (Vektorraum)

Zeigen Sie, dass die Menge U wie sie unten definiert ist einen Vektorraum bildet. Gehen Sie dabei so vor, dass Sie alle Rechenregeln, die in einem Vektorraum gelten müssen nachweisen. Sie dürfen hierbei alle Ihnen bekannten Rechenregeln, die für reelle Zahlen gelten, verwenden.

$$U := \{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 0\}$$

Lösung: Bevor wir beginnen die Regeln V1 bis V8 zu zeigen müssen wir zunächst die beiden Vorbedingungen aus der Definition prüfen.
Seien $x, y \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir müssen zeigen, dass gilt: $x + y \in U$ und $\lambda x \in U$.
Damit $x + y \in U$ gilt, muss die folgenden Gleichung erfüllt sein:

$$2(x_1+y_1) + 3(x_2+y_2) - 4(x_3+y_3) + (x_4+y_4) = 0$$

Wir dürfen nach den Rechenregeln reellen Zahlen folgendermaßen umformen:

$$2(x_1+y_1)+3(x_2+y_2)-4(x_3+y_3)+(x_4+y_4) = (2x_1+3x_2-4x_3+x_4)+(2y_1+3y_2-4y_3+y_4) = 0+0 = 0$$

Die dritte Gleichheit gilt, da x und y Elemente aus U sind. Also erfüllt auch $x + y$ die für U geforderte Gleichung und ist daher auch ein Element aus U.
Um zu zeigen, dass $\lambda x \in U$ gilt, müssen wir zeigen, dass auch die folgende Gleichung erfüllt ist:

$$2(\lambda x_1) + 3(\lambda x_2) - 4(\lambda x_3) + (\lambda x_4) = 0$$

Wieder können wir dank der Rechenregeln für reelle Zahlen die folgenden Umformungen machen:

$$2(\lambda x_1) + 3(\lambda x_2) - 4(\lambda x_3) + (\lambda x_4) = \lambda(2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4) = \lambda(0) = 0$$

Wie oben haben wir also wie gefordert gezeigt, dass auch λx ein Element aus U ist.
Nun können wir die Rechenregeln V1 bis V8 betrachten. Hier werden exemplarisch nur V2, V3 und V7 betrachtet. Alle anderen Begründungen gestalten sich analog.

(V2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
Da x, y und z aus $\mathbb{R}^4$ sind. Gilt:

$$(x+y)+z = \begin{pmatrix} (x_1+y_1)+z_1 \\ (x_2+y_2)+z_2 \\ (x_3+y_3)+z_3 \\ (x_4+y_4)+z_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1+(y_1+z_1) \\ x_2+(y_2+z_2) \\ x_3+(y_3+z_3) \\ x_4+(y_4+z_4) \end{pmatrix} = x + (y+z)$$

Die zweite Gleichheit gilt wegen der Assoziativität der Addition bei reellen Zahlen.

(V3) Es gibt ein Element 0 in U.

Tatsächlich gilt für $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ dass $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 0 = 0$, also ist $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ ein Element aus U.

Und es gilt die geforderte Gleichung $x + 0 = x$ nach den Rechenregeln für reelle Zahlen.

(V7) Es soll gelten: $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ Wir werden ähnlich vorgehen wie bei V2. We gilt:

$$\lambda(x+y) = \begin{pmatrix}\lambda(x_1+y_1)\\\lambda(x_2+y_2)\\\lambda(x_3+y_3)\\\lambda(x_4+y_4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda x_1+\lambda y_1\\\lambda x_2+\lambda y_2\\\lambda x_3+\lambda y_3\\\lambda x_4+\lambda y_4\end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y$$

Wieder gilt die zweite Gleichheit aufgrund der Rechengesetze für reelle Zahlen.

Hausübung

Aufgabe H1 (Skalarprodukt und Winkel) (6 Punkte)

Die Punkte $P_1(0,0)$, $P_2(2,1)$ und $P_3(-1,4)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks im $\mathbb{R}^2$. Berechnen Sie

a) die Länge der Seiten P_1P_2, P_1P_3 und P_2P_3,

b) die Winkel in den Punkten P_1, P_2 und P_3 und

c) den Flächeninhalt des Dreiecks.

Lösung: Gegeben sind die Punkte $P_1 = (0,0)$, $P_2 = (2,1)$ und $P_3 = (-1,4)$. Diese ergeben das Dreieck

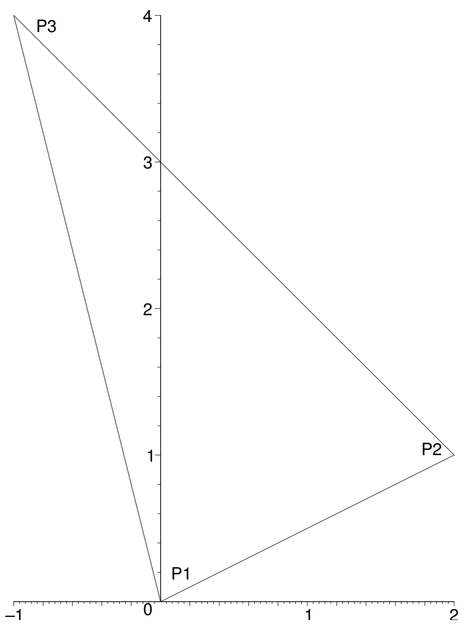

Abbildung 1: Zeichnung zu Aufgabe H1

Die Richtungsvektoren sind die folgenden:

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix}2-0\\1-0\end{pmatrix},\ P_1P_3 = \begin{pmatrix}-1-0\\4-0\end{pmatrix},\ P_2P_3 = \begin{pmatrix}-1-2\\4-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}$$

a) Zur Berechnung der Längen der Vektoren verwenden wir die Formel

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}.$$

Wir erhalten also

$$|P_1P_2| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5},\ |P_1P_3| = \sqrt{1+16} = \sqrt{17},\ |P_2P_3| = \sqrt{9+9} = 3\sqrt{2}$$

b) Es gilt die Formel

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha.$$

Somit erhalten wir den Winkel im Punkt P_1

$$\cos\alpha = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}}{\sqrt{5}\sqrt{17}} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{17}}$$

und damit

$$\alpha = \arccos\frac{7}{\sqrt{5}\sqrt{17}} = \begin{cases} 77,47^\circ \\ 1,3521 \quad \text{(Winkel im Bogenmaß)} \end{cases}$$

Für den Winkel in P_2 gilt (<u>VORSICHT! Sie müssen die Richtung des Vektors P_1P_2 zuerst umkehren</u>)

$$\cos\beta = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}}$$

und damit

$$\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \begin{cases} 71,56^\circ \\ 1,249 \quad \text{(Winkel im Bogenmaß)} \end{cases}$$

Analog für den Winkel in P_3 gilt $\gamma = \begin{cases} 30,96^\circ \\ 0,5404 \quad \text{(Winkel im Bogenmaß)} \end{cases}$

c) Für den Flächeninhalt kennen wir eine Formel aus Mathe 1, die mit Hilfe des Vektorprodukts den Flächeninhalt berechnet. Da das Vektorprodukt aber nur für Vektoren im $\mathbb{R}^3$ definiert ist, müssen wir an zwei, das Dreieck aufspannende Vektoren jeweils noch eine 0 anhängen. Hier wählen wir die Vektoren P_1P_2 und P_1P_3. Mit der Formel berechnen wir also:

$$\frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = 4,5$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt also 4,5 Flächeneinheiten.

Aufgabe H2 (Geraden im $\mathbb{R}^2$) (6 Punkte)

Gegeben sei der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

a) Geben Sie alle Vektoren an, die auf v_1 senkrecht stehen.

b) Es sei v_1 der Ortsvektor des Punktes P und der Vektor $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ der Ortsvektor des Punktes Q. Geben Sie die Gleichungen für die Gerade g_1 durch den Punkt P mit Richtungsvektor v_2 und die Gerade g_2 durch den Punkt Q mit Richtungsvektor v_1 an. Berechnen Sie den Schnittwinkel und den Schnittpunkt von g_1 und g_2.

Lösung: Gegeben ist der Vektor $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

a) Gesucht sind alle Vektoren w, für die gilt $v_1 \perp w$, es muss also gelten

$$\begin{aligned} & v_1 \cdot w = 0 \\ \Rightarrow \quad & 3w_x + \sqrt{3}w_y = 0 \\ \Rightarrow \quad & w_x = -\frac{1}{\sqrt{3}}w_y \end{aligned}$$

Wählen wir $w_y = 1 \Rightarrow w_x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

$$\Rightarrow w = \delta \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{w} = \delta \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \delta \in \mathbb{R}$$

sind die zu v_1 orthogonalen Vektoren.

b) Wir bestimmen die Geraden zunächst in der Form

$$\begin{aligned} g_1 : \vec{x} = v_1 + \lambda v_2 &= \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \\ g_2 : \vec{x} = v_2 + \rho v_1 &= \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} + \rho \begin{pmatrix} 3 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad \rho \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Die Geradengleichungen ergeben sich somit als

$$g_1 : 3x - \sqrt{3}y = 6 \quad \text{und} \quad g_2 : x - \sqrt{3}y = -2.$$

Offensichtlich ist der Schnittwinkel $\varphi = \frac{\pi}{6}$.
Als Schnittpunkt erhält man durch Lösen des Gleichungssystems bestehend aus g_1 und g_2 den Punkt $(4, 2\sqrt{3})$.

Aufgabe H3 (Determinanten) (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

Lösung:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 5 \cdot 2 = 21 - 10 = 11$$

weiterhin ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\det B &= \begin{vmatrix} 3 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 9 & 2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= 3\cdot 5\cdot 0 + 2\cdot 2\cdot(-4) + 9\cdot 7\cdot 3 - 9\cdot 5\cdot(-4) - 3\cdot 2\cdot 3 - 2\cdot 7\cdot 0 \\
&= 0 - 16 + 189 + 180 - 18 - 0 \\
&= 335.
\end{aligned}
$$