Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan
SS 2008

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

17.07.2008

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO
Semestralklausur 1

Bitte in DRUCKSCHRIFT deutlich lesbar ausfüllen:

Name: ....   Matrikelnummer: ....

Vorname: ....   Studienfach: ....

Fachsemester: ....   Übungsgruppe: ....

Aufgabe	1	2	3	MC	$\sum$
Maximale Punktzahl	10	12	8	20	50
Erreichte Punktzahl					

Bitte **alle** Blätter mit **Namen** versehen, fortlaufend numerieren und am Schluß der Klausur in das in der Mitte einmal gefaltete Aufgabenblatt legen. Das Schreiben mit Bleistift ist nicht erlaubt.

Geben Sie bitte **sämtliche Zwischenergebnisse** bei der Lösung der Aufgaben an, andernfalls muß mit Punktabzug gerechnet werden.

Hilfsmittel: Zugelassen sind zwei selbst handschriftlich beschriebene DIN-A4-Seiten und ein einfacher und nicht-programmierbarer Taschenrechner.

Aufgabe 1 (3 + 5 + 2 = 10 Punkte)

Gegeben ist die folgende Quadrik

$$Q(x_1, x_2) = \frac{9}{2}x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{17}{2}x_2^2 - \frac{12}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{116}{\sqrt{10}}x_2 + 4 = 0.$$

(a) Geben Sie die Quadrik in der Form $x^T Ax + b^T x + c = 0$ an, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie weiterhin, dass 4 und 9 Eigenwerte der Matrix A sind.

(b) Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch.

(c) Skizzieren Sie die Quadrik im x_1-x_2-Koordinatensystem. Geben Sie explizit den Mittelpunkt und die Länge der Hauptachsen an.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 8 = 12 Punkte)

Bei dieser Aufgabe geht es darum, Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ auf der Menge $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ zu finden.

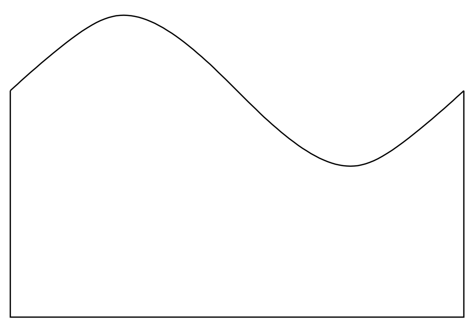
(a) Begründen Sie, warum f auf S ein Maximum und ein Minimum annimmt.

(b) Sei $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$. Berechnen Sie L_x, L_y, L_z, L_λ.

(c) Bestimmen Sie nun die Extrema von f auf S, das heißt bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Aufgabe 3 (2 + 6 = 8 Punkte)

Eine Betonplatte B soll stabil auf eine Säule gesetzt werden. Um dies zu erreichen, soll der Schwerpunkt von B berechnet werden. Die Platte habe dabei ungefähr folgende Gestalt:



Wir stellen uns B als Fläche im $\mathbb{R}^2$ vor. Der untere linke Eckpunkt von B sei der Ursprung und die obere geschwungene Kante sei $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \, y = \sin(x) + 3 \text{ und } 0 \leq x \leq 2\pi\}$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von B als Integral $\iint_B 1 \, d(x, y)$.

(b) Berechnen Sie nun den Schwerpunkt (x_s, y_s) von B

Hinweis: Sie können benutzen, dass gilt: $\int \sin(x)^2 \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$.

Mathematik II für BI, WIBI, MaWi und GEO
Semestralklausur 1, Lösungsvorschlag

Aufgabe 1 (3 + 5 + 2 = 10 Punkte)

Gegeben ist die folgende Quadrik

$$Q(x_1, x_2) = \frac{9}{2}x_1^2 - 3x_1x_2 + \frac{17}{2}x_2^2 - \frac{12}{\sqrt{10}}x_1 + \frac{116}{\sqrt{10}}x_2 + 4 = 0.$$

(a) Geben Sie die Quadrik in der Form $x^T Ax + b^T x + c = 0$ an, wobei $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie weiterhin, dass 4 und 9 Eigenwerte der Matrix A sind.

(b) Führen Sie eine Hauptachsentransformation durch.

(c) Skizzieren Sie die Quadrik im x_1-x_2-Koordinatensystem. Geben Sie explizit den Mittelpunkt und die Länge der Hauptachsen an.

Aufgabe 2 (2 + 2 + 8 = 12 Punkte)

Bei dieser Aufgabe geht es darum, Extrema der Funktion $f(x, y, z) = x^2 + y - z$ auf der Menge $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \, g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$ zu finden.

(a) Begründen Sie, warum f auf S ein Maximum und ein Minimum annimmt.

(b) Sei $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z)$. Berechnen Sie L_x, L_y, L_z, L_λ.

(c) Bestimmen Sie nun die Extrema von f auf S, das heißt bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

(a) S ist kompakt (abgeschlossen und beschränkt im $\mathbb{R}^3$) und f ist stetig. Nach dem Satz vom Minimum und Maximum nimmt f auf S ein Minimum und ein Maximum an.

(b) Wir leiten L partiell ab:

$$\begin{aligned} L_x &= f_x - \lambda g_x = 2x - (2x)\lambda \overset{!}{=} 0, \\ L_y &= f_y - \lambda g_y = 1 - (2y)\lambda \overset{!}{=} 0, \\ L_z &= f_z - \lambda g_z = -1 - (2z)\lambda \overset{!}{=} 0, \\ L_\lambda &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 \overset{!}{=} 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Die partiellen Ableitungen müssen zur Bestimung von Extrema unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = 0$ alle Null sein.

(c) Wegen der zweiten und dritten Gleichung von (1) sind y, z, λ allesamt ungleich Null. Ferner sagen uns dieselben Gleichungen auch $y = \frac{1}{2\lambda}$ und $z = -\frac{1}{2\lambda}$, somit ist $y = -z$. Wir betrachten nun die Fälle $x \neq 0$ und $x = 0$:

Sei $x \neq 0$, dann formen wir die erste Gleichung von (1) wie folgt um:

$$2x - (2x)\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1.$$

Dann ist $y = \frac{1}{2}$ und $z = -\frac{1}{2}$. Wir setzen dies in die vierte Gleichung von (1) ein:

$$x^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Somit haben wir zwei Kandidaten für Extrema: $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ und $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

Sei nun $x = 0$. Wir setzen dies und $y = -z$ in die vierte Gleichung von (1) ein:

$$2z^2 = 1 \text{ und } y = -z \quad \Longrightarrow \quad z = \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ und } y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

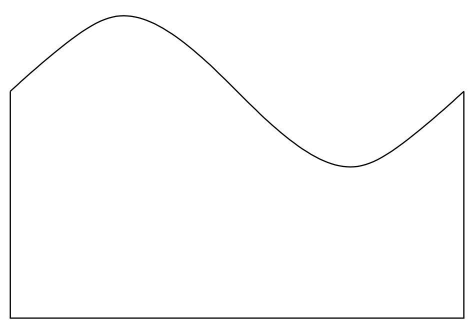
Somit haben wir zwei weitere Kandidaten für Extrema: $(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ *und* $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$*.*
Wir berechnen nun die Funktionswerte an obigen Stellen:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) &= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \\ f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < \frac{3}{2}, \\ f\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) &= -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Somit ist f auf K in $(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *minimal und in* $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ *maximal.*

Aufgabe 3 (2 + 6 = 8 Punkte)

Eine Betonplatte B soll stabil auf eine Säule gesetzt werden. Um dies zu erreichen, soll der Schwerpunkt von B berechnet werden. Die Platte habe dabei ungefähr folgende Gestalt:



Wir stellen uns B als Fläche im $\mathbb{R}^2$ vor. Der untere linke Eckpunkt von B sei der Ursprung und die obere geschwungene Kante sei $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin(x) + 3 \text{ und } 0 \leq x \leq 2\pi\}$.

(a) Berechnen Sie den Flächeninhalt von B als Integral $\iint_B 1\, d(x, y)$.

(b) Berechnen Sie nun den Schwerpunkt (x_s, y_s) von B

Hinweis: Sie können benutzen, dass gilt: $\int \sin(x)^2\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))$.

(a) Da B ein Normalbereich ist, können wir integrieren:

$$\begin{aligned} \iint_B 1\, d(x, y) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sin(x)+3} 1\, dy\, dx = \int_0^{2\pi} [y]_{y=0}^{y=\sin(x)+3}\, dx = \int_0^{2\pi} (\sin(x) + 3)\, dx \\ &= [-\cos(x) + 3x]_{x=0}^{x=2\pi} = (-\cos(2\pi) + 6\pi) - (-\cos(0) + 0) = 6\pi. \end{aligned}$$

(b)*Wir benötigen noch die Integrale* $\iint_B x\,d(x,y)$ *und* $\iint_B y\,d(x,y)$*:*

$$\begin{aligned}
\iint_B x\,d(x,y) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sin(x)+3} x\,dy\,dx = \int_0^{2\pi} [xy]_{y=0}^{y=\sin(x)+3}\,dx = \int_0^{2\pi} (x\sin(x)+3x)\,dx \\
&= [-x\cos(x)]_{x=0}^{x=2\pi} - \int_0^{2\pi} -\cos(x)\,dx + \left[\frac{3x^2}{2}\right]_{x=0}^{x=2\pi} \\
&= (-2\pi+0) + [\sin(x)]_{x=0}^{x=2\pi} + \left(\frac{12\pi^2}{2} - 0\right) = 6\pi^2 - 2\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_B x\,d(x,y) &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sin(x)+3} y\,dy\,dx = \int_0^{2\pi} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{y=\sin(x)+3}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\sin(x)^2 + 6\sin(x) + 9)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[\frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x))\right]_{x=0}^{x=2\pi} + [-6\cos(x)]_{x=0}^{x=2\pi} + [9x]_{x=0}^{x=2\pi}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(2\pi - 0) + 0 + 18\pi\right) = \frac{19\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Also ist $(x_s, y_s) = \left(\frac{6\pi^2-2\pi}{6\pi}, \frac{\frac{19\pi}{2}}{6\pi}\right) \approx (2,8082; 1,5833)$.