Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
Übungsblatt für die letzten zwei Wochen

13. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo"

Gruppenübung

Aufgabe G43 (Multiple Choice)

(a) ☐ Kurvenintegrale längs geschlossener Kurven sind immer Null.

☐ Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder sind immer Null.

☐ Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder längs Kurven sind nur endpunktabhängig.

☐ Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder längs geschlossener Kurven sind immer Null.

(b) ☐ Parametrisierte Flächen sind die Bilder S stetiger Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to \mathbb{R}^3$ für aus Normalbereichen zusammengesetzte D.

☐ Parametrisierte Flächen sind immer glatt.

☐ Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u^2, u + v^2, v)^T$ beschreibt eine glatte Fläche.

☐ Die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (v\cos(u), v\sin(u), v)^T$ beschreibt eine glatte Fläche.

Aufgabe G44 (Reguläre Flächen, Normaleneinheitsvektoren, Oberflächenintegrale)

(a) Entscheiden Sie, ob die Bilder der folgenden Funktionen reguläre Flächen sind und bestimmen Sie gegebenenfalls die Normaleneinheitsvektoren.

i. $g : (-\pi; \pi) \times \left(\frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right)$, $(u, v) \mapsto (\cos(u)\sin(v), \sin(u)\sin(v), \cos(v))^T$.

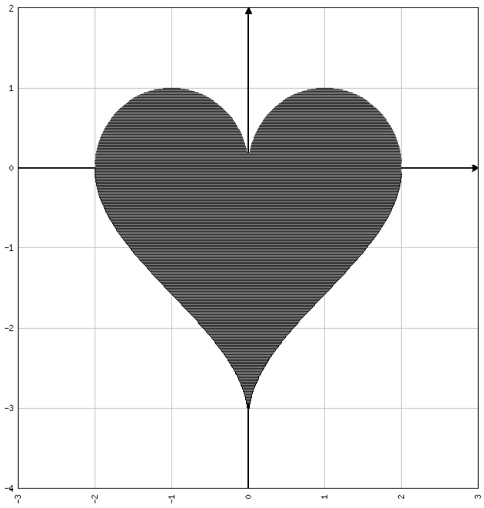
ii. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (u^2, u^3, v)^T$.

iii. $g : (1; 2) \times (0; 2\pi) \to \mathbb{R}^3$, $(u, v) \mapsto (v\cos(u), v\sin(u), v)^T$.

(b) Sei S das Bild von g aus (a) i. Bestimmen Sie den Flächeninhalt $\iint_S 1\,dO$ und das Integral $\iint_S \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,dO$.

(c) Sei T das Bild von g aus (a) iii. und $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-yz, xz, x^2 + y^2)^T$ ein Vektorfeld. Berechnen Sie $\iint_T w \cdot dO$.

Aufgabe G45 (Satz von Green)



Wir erinnern uns an das Herz H aus Aufgabe H33, zusammengesetzt aus den Stücken

$$H_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 < x < 2 \text{ und } 0 < y < \sqrt{1-(x-1)^2} \right\}$$
$$H_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -2 < x < 0 \text{ und } 0 < y < \sqrt{1-(x+1)^2} \right\}$$
$$H_3 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -\cos(y) - 1 < x < \cos(y) + 1 \text{ und } -\pi < y < 0 \right\}.$$

(a) Zerlegen Sie den Rand ∂H in vier Kurven C_1, C_2, C_3, C_4 und geben sie korrespondierende Parametrisierungen x_1, x_2, x_3, x_4 an.

(b) Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (x-y, x)^T$. Bestimmen Sie $\oint_{\partial H} w \cdot dx$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Green.

Aufgabe G46 (Satz von Stokes)

Sei $D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x^2+y^2} < 1 \right\}$ und $g : D \to \mathbb{R}^3, (u,v) \mapsto (u, v, \sqrt{1-u^2-v^2})^T$ mit Bild S.

(a) Was ist S anschaulich, was sein Rand ∂S? Parametrisieren Sie ∂S mit einem $x : [a,b] \to \mathbb{R}^3$.

(b) Warum ist S glatte Fläche?

(c) Sei $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (z, -x, y)^T$. Bestimmen Sie $\oint_{\partial S} w \cdot dx$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes.

Aufgabe G47 (Satz von Gauß im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$)

(a) Wir betrachten erneut das Herz H aus Aufgabe H33 und G45.

i. Bestimmen Sie den Normaleneinheitsvektor des Randes ∂H mit der Zerlegeung von ∂H gemäß G45 (a) und der Formel für Normaleneinheitsvektoren an Kurven:

$$n_i(x_i(t)) = \frac{1}{\left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x_i'(t) \right|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot x_i'(t).$$

ii. Sei $w : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (0, x)^T$. Bestimmen Sie $\oint_{\partial H} (w \cdot n)\, ds$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Satzes von Gauß.

(b) Sei $\mathbb{S}^2 = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1 \right\}$. Berechnen Sie mit dem Satz von Gauß das Integral $I = \oiint_{\mathbb{S}^2} (x^2+z^2, 2y+e^x, z-\sin(x)y)^T \cdot n(x,y,z)\, dO(x,y,z)$.

Übersicht über Integrale und Integralsätze

1. Eindimensionales Integral für $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ integrierbar:

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

2. *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* für $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F' = f$:

$$\int_a^b f \stackrel{!}{=} F(b) - F(a).$$

3. *Substitiutionsregel* für $g : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $f : [g(a); g(b)] \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx \stackrel{!}{=} \int_a^b f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt.$$

4. Zweidimensionales Integral für $I = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\iint_I f = \iint_I f(x, y)\,d(x, y) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f(x, y)\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x, y)\,dx\,dy.$$

5. Zweidimensionales Integral für $B \subseteq \mathbb{R}^2$ Normalbereich und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\iint_B f = \iint_B f(x, y)\,d(x, y) = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y)\,dy\,dx \text{ oder } \iint_B f = \int_c^d \int_{l(y)}^{r(y)} f(x, y)\,dx\,dy.$$

6. Dreidimensionales Integral für $I = [a_1; b_1] \times [a_2; b_2] \times [a_3; b_3]$ und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\iiint_I f = \iiint_I f(x, y, z)\,d(x, y, z) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} f\,dz\,dy\,dx = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_3}^{b_3} \int_{a_1}^{b_1} f\,dx\,dz\,dy \text{ usw.}$$

7. Dreidimensionales Integral für $B \subseteq \mathbb{R}^3$ Normalbereich und $f : B \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\iiint_B f = \iiint_B f(x, y, z)\,d(x, y, z) = \int_a^b \int_{u(x)}^{v(x)} \int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f\,dz\,dy\,dx \text{ usw.}$$

8. *Zwei- bzw. dreidimensionale Transformationsformel* für $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $A, B \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $g : B \to A$ stetig differenzierbar mit stetig differenzierbarer Umkehrfunktion, $f : A \to \mathbb{R}$ stetig:

$$\iint_A f(x, y)\,d(x, y) \stackrel{!}{=} \iint_B f(g(u, v)) \cdot |\det \mathcal{J}_g(u, v)|\;d(u, v) \text{ bzw.}$$
$$\iiint_A f(x, y, z)\,d(x, y, z) \stackrel{!}{=} \iiint_B f(g(u, v, w)) \cdot |\det \mathcal{J}_g(u, v, w)|\;d(u, v, w).$$

9. Kurvenintegral vom Skalarenfeld $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ längs regulärer Kurve $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(x(t))\,\left|x'(t)\right|\,dt \underset{\text{Kurve } C}{\overset{\text{bei geschlossener}}{=}} \oint_C f\,ds.$$

10. Kurvenintegral vom Vektorfeld $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ längs regulärer Kurve $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:

$$\int_C w \cdot dx = \int_a^b w(x(t)) \cdot x'(t)\, dt \overset{\text{bei geschlossener}}{\underset{\text{Kurve } C}{=}} \oint_C w \cdot dx.$$

11. *Hauptsatz für Kurvenintegrale konservativer Vektorfelder* $w = \nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *längs regulärer Kurven* $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:

$$\int_C w \cdot dx \overset{!}{=} f(x(b)) - f(x(a)) \text{ und bei geschlossener Kurve } C\text{: } \oint_C w \cdot dx = 0.$$

12. Oberflächenintegral vom Skalarenfeld $f : S \to \mathbb{R}$ über S, gegeben durch $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\iint_S f\, dO = \iint_D f(g(u,v))\, |g_u(u,v) \times g_v(u,v)|\; d(u,v) \overset{\text{bei geschlossener}}{\underset{\text{Fläche } S}{=}} \oiint_S f\, dO.$$

13. Oberflächenintegral vom Vektorfeld $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ über S, gegeben durch $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$:

$$\iint_S w \cdot dO = \iint_D w(g(u,v)) \cdot (g_u(u,v) \times g_v(u,v))\; d(u,v) \overset{\text{bei geschlossener}}{\underset{\text{Fläche } S}{=}} \oiint_S w \cdot dO.$$

14. *Satz von Green* für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $w : D \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld, $B \subseteq D$ Bereich mit stückweise regulärem, geschlossenem Rand $\partial B = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, jedes $C_i = x_i : [a; b] \to \mathbb{R}^2$:

$$\int_{C_1} w \cdot dx_1 + \ldots + \int_{C_k} w \cdot dx_k = \oint_{\partial B} w \cdot dx \overset{!}{=} \iint_B \left(\frac{\partial w_2}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial w_1}{\partial y}(x,y) \right) d(x,y).$$

15. *Satz von Stokes* für $w : S \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld über stückweise regulärem S gegeben durch $g : \mathbb{R}^2 \supseteq D \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ mit stückweise regulärem, geschlossenem Rand $\partial S = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, jedes $C_i = x_i : [a; b] \to \mathbb{R}^3$:

$$\int_{C_1} w \cdot dx_1 + \ldots + \int_{C_k} w \cdot dx_k = \oint_{\partial S} w \cdot dx \overset{!}{=} \iint_S \operatorname{rot}(w) \cdot dO = \iint_S (\nabla \times W) \cdot dO.$$

16. *Satz von Gauß im* $\mathbb{R}^2$ für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $w : D \to \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbares Vektorfeld, $B \subseteq D$ Bereich mit stückweise regulärem, geschlossenem Rand $\partial B = C_1 \cup \ldots \cup C_k$, jedes $C_i = x_i : [a; b] \to \mathbb{R}^2$, äußerer Normaleneinheitsvektor $n_i : C_i \to \mathbb{R}^2$, $|n_i| = 1$:

$$\int_{C_1} (w \cdot n_1)\, ds + \ldots + \int_{C_k} (w \cdot n_k)\, ds = \oint_{\partial B} (w \cdot n)\, ds \overset{!}{=} \iint_B \operatorname{div}(w) = \iint_B \nabla \cdot w.$$

17. *Satz von Gauß im* $\mathbb{R}^3$ für $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $w : D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbares Vektorfeld, $B \subseteq D$ aus Normalbereichen zusammengesetzt mit stückweise regulärem, orientiertem Rand ∂B und äußerem Normaleneinheitsvektor $n : \partial B \to \mathbb{R}^3$, $|n| = 1$:

$$\oiint_{\partial B} (w \cdot n)\, dO \overset{!}{=} \iiint_B \operatorname{div}(w) = \iiint_B \nabla \cdot w.$$