Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
19./20./23. Juni

12. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo"

Gruppenübung

Aufgabe G39 (Integration über Normalbereiche, Transformationsformel, Polarkoordinaten)

(a) Sei $N = \Big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \Big| -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \text{ und } -1 \leq y \leq 1 \Big\}$.

i. Skizzieren Sie N. Um welchen Typ Normalbereich handelt es sich hier?

ii. Berechnen Sie $\int_N 2xy \, d(x,y)$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \, d(x,y)$ mit Hilfe der Transformationsformel und der Funktion $g : \mathbb{R}_{>0} \times (0; 2\pi) \to \mathbb{R}^2, (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}$. Man nennt diese spezielle Transformation die *Transformation des $\mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten*.

Aufgabe G40 (Schwerpunktberechnung mittels Integration)

Der Schwerpunkt eines Normalbereichs $A \subseteq \mathbb{R}^2$ bzw. $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein Punkt $(x_s, y_s) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x_s, y_s, z_s) \in \mathbb{R}^3$ für den man folgende Formeln hat: $x_s = \frac{\int_A x \, d(x,y)}{\int_A 1 \, d(x,y)}$ und $y_s = \frac{\int_A y \, d(x,y)}{\int_A 1 \, d(x,y)}$ bzw. $x_s = \frac{\int_B x \, d(x,y,z)}{\int_B 1 \, d(x,y,z)}$ und $y_s = \frac{\int_B y \, d(x,y,z)}{\int_B 1 \, d(x,y,z)}$ und $z_s = \frac{\int_B z \, d(x,y,z)}{\int_B 1 \, d(x,y,z)}$.

(a) Skizzieren Sie $A = \big\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| -x-1 \leq y \leq -x^2+1 \text{ und } -1 \leq x \leq 1 \big\}$ und bestimmen Sie seinen Schwerpunkt.

(b) Sei $B = \big\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \big| \, x^2 + y^2 \leq z^2 \text{ und } 0 \leq z \leq 1 \big\}$. Um welches geometrisches Objekt handelt es sich bei B? Was ist sein Schwerpunkt?

Aufgabe G41 (Massenberechnung mittels Integration)

Ein Landstück L ist 10 m $\times$ 10 m groß. Messungen haben ergeben, dass die Bodendichte in $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ auf L durch die Funktion $\rho(x,y,z) = 10 + 0,3xy + 0,1yz + 0,2xz$ gegeben ist. Hierbei bezeichnen x, y horizontalen Koordinaten und z die Tiefe, jeweils in m.

Berechnen Sie die Masse der aus dem Boden zu hebenden Erde, wenn in die Mitte von L ein quadratisches Loch mit Seitenlänge 6 m und Tiefe 8 m gebohrt werden soll.

Aufgabe G42 (Kurvenintegrale)

(a) Berechnen Sie $\int_C v \cdot dx$ für die Vektorfelder $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und Kurven $C = x : [a;b] \to \mathbb{R}^n$:

i. $v(x_1, x_2) = (3x_1 + 2x_2, 2x_1)^T$ und $x(t) = (\cos(t), -2\sin(t))^T$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

ii. $v(x_1, x_2, x_3) = (x_2 x_3, -x_1 x_3, e^{x_3})^T$ und $x(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T$ mit $0 \leq t \leq \pi$.

(b) Lösen Sie das Kurvenintegral von (a) i. mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.

Hausübung

Beachten Sie, dass dies die letzten Hausübungen der Veranstaltung sind!

Aufgabe H34 (Integration im $\mathbb{R}^3$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten) (5 Punkte)

Sei $G = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| \, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \right\}$. Berechnen Sie mit Hilfe der Transformationsformel und der Funktion $g : (0; 1) \times (0; 2\pi) \times (0; \pi) \to \mathbb{R}^3, (r, \varphi, \gamma) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi)\sin(\gamma) \\ r\sin(\varphi)\sin(\gamma) \\ r\cos(\gamma) \end{pmatrix}$ die Integrale $I_1 = \int_G 1 \, d(x, y, z)$ und $I_2 = \int_G \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, d(x, y, z)$. Man nennt diese spezielle Transformation die *Transformation der Einheitskugel im* $\mathbb{R}^3$ *in Kugelkoordinaten.*

Aufgabe H35 (Schwerpunktberechnung mittels Integration) (4+1=5 Punkte)

Bestimmen Sie den Schwerpunkt von $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$ aus Aufgabe H33. Wie erhält man den Schwerpunkt des Körpers $\mathcal{H}$, den man bekommt, wenn man H um die y-Achse rotieren lässt?

Aufgabe H36 (Kurvenintegrale) (3+2=5 Punkte)

(a) Berechnen Sie $\int_C v \cdot dx$ für die Vektorfelder $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ und Kurven $C = x : [a; b] \to \mathbb{R}^n$:

  i. $v(x_1, x_2) = (x_2 \cos(x_1 x_2), x_1 \cos(x_1 x_2))^T$ und $x(t) = (t, 1)^T$ mit $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

  ii. $v(x_1, x_2, x_3) = \left(x_2 \ln(x_3), -x_1 \ln(x_3), \frac{x_2}{x_3} \right)^T$ und $x(t) = (t, t^2, e^t)^T$ mit $0 \leq t \leq 1$.

(b) Lösen Sie das Kurvenintegral von (a) i. mit Hilfe des Hauptsatzes für Kurvenintegrale.