Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2008
12./13./16. Juni

11. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G36 (Multiple Choice)

(a) ☐ Der Gradient ist für Skalarenfelder definiert.
☐ Der Gradient ist für Vektorfelder definiert.
☐ Die Rotation ist für Skalarenfelder definiert.
☐ Die Rotation ist für Vektorfelder definiert.
☐ Die Divergenz ist für Skalarenfelder definiert.
☐ Die Divergenz ist für Vektorfelder definiert.
☐ Der Laplace-Operator ist für Skalarenfelder definiert.
☐ Der Laplace-Operator ist für Vektorfelder definiert.

(b) ☐ Stetige Funktionen sind auf kompakten Intervallen integrierbar.
☐ Stetige Funktionen sind immer integrierbar.
☐ Die Transformationsformel im $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_B f(g(u,v)) \cdot \det \mathcal{J}_g(u,v)\,d(u,v)$$

für $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, stetiges $f: A \to \mathbb{R}$ und $g: B \to A$ stetig differenzierbar und bijektiv.
☐ Die Transformationsformel im $\mathbb{R}^2$ lautet

$$\int_A f(x,y)\,d(x,y) = \int_B f(g(u,v)) \cdot |\det \mathcal{J}_g(u,v)|\,d(u,v)$$

für $A, B \subseteq \mathbb{R}^2$, stetiges $f: A \to \mathbb{R}$ und $g: B \to A$ stetig differenzierbar und bijektiv.

Aufgabe G37 (Jacobi-Matrizen und Kettenregel)

(a) Bestimmen Sie von folgenden Funktionen die Jacobi-Matrix:

$$f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, f_1(x,y) = (2xy - y^2, \sin(x) + y, \cos(xy))^T,$$
$$f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, f_2(x,y,z) = (x^2 z - yz^3, \ln(xyz))^T, \quad f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}, f_3(w,x,y,z) = xy \cdot e^{wxyz}.$$

(b) Was ist der Unterschied zwischen dem Gradienten und der Jacobi-Matrix einer Funktion?

(c) Seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - xy, x + y^3)^T$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $g(z) = (z,z)^T$. Bestimmen Sie $\mathcal{J}_{(f\circ g)}(7)$ auf zwei Arten und Weisen: einmal direkt, indem sie $(f \circ g)$ bilden und dann die partiellen Ableitungen berechnen und einmal mit Hilfe der Kettenregel:

$$\mathcal{J}_{(f\circ g)}(z) = \mathcal{J}_f(g(z)) \cdot \mathcal{J}_g(z).$$

Aufgabe G38 (grad, div, rot, Δ)

Wir wiederholen kurz einige Begrifflichkeiten. Seien dafür $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, (x,y,z) \mapsto f(x,y,z)$ und $v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x,y,z) \mapsto (v_1(x,y,z), v_2(x,y,z), v_3(x,y,z))^T$. Dann definieren wir:

- Der *Gradient von* f ist $\operatorname{grad} f = \nabla f = (f_x, f_y, f_z)^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- Die *Divergenz von* v ist $\operatorname{div} v = \partial_x v_1 + \partial_y v_2 + \partial_z v_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.
- Die *Rotation von* v ist $\operatorname{rot} v = (\partial_y v_3 - \partial_z v_2, \quad \partial_z v_1 - \partial_x v_3, \quad \partial_x v_2 - \partial_y v_1)^T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
- *Laplace von* f ist $\Delta f = \partial_x\partial_x f + \partial_y\partial_y f + \partial_z\partial_z f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.

Nun wollen wir einige Rechenregeln mit diesen Symbolen zeigen.

(a) Für $\operatorname{div} v$ schreibt man oft auch $\nabla \cdot v$. Begründen Sie dies, indem Sie $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ schreiben und $\cdot$ als Standard-Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ lesen.

(b) Für $\operatorname{rot} v$ schreibt man oft auch $\nabla \times v$. Begründen Sie dies, indem Sie $\nabla = \begin{pmatrix} \partial_x \\ \partial_y \\ \partial_z \end{pmatrix}$ schreiben und $\times$ als Kreuzprodukt im $\mathbb{R}^3$ lesen.

(c) Zeigen Sie, dass gilt: $\nabla \times (\nabla f) = \operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0 \in \mathbb{R}^3$.

(d) Zeigen Sie, dass gilt: $\nabla \cdot (\nabla \times v) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} v) = 0 \in \mathbb{R}$.

(e) Zeigen Sie, dass gilt: $\nabla \cdot (\nabla f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$. Daher schreibt man manchmal: $\nabla^2 = \Delta$.

Aufgabe G39 (Integration über Normalbereiche, Transformationsformel, Polarkoordinaten)

(a) Sei $N = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \frac{y}{2} + \frac{1}{2} \text{ und } -1 \leq y \leq 1 \right\}$.

i. Skizzieren Sie N. Um welchen Typ Normalbereich handelt es sich hier?

ii. Berechnen Sie $\int_N 2xy \, d(x,y)$.

(b) Berechnen Sie das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}}{(x^2+y^2)^2} \, d(x,y)$$

mit Hilfe der Transformationsformel und der Funktion

$$g : \mathbb{R}_{>0} \times (0; 2\pi) \to \mathbb{R}^2, (r,\varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$

Man nennt diese spezielle Transformation die *Transformation in Polarkoordinaten des* $\mathbb{R}^2$.

Hausübung

Aufgabe H31 (Jacobi-Matrizen und Kettenregel) (3+2=5 Punkte)

Seien $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(w, x, y) \mapsto wx - xy + wy$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $z \mapsto (z, -z, z^3)^T$.
Bestimmen Sie jeweils auf zwei Arten und Weisen:

(a) $(f \circ g)'(1) = \mathcal{J}_{(f\circ g)}(1)$.

(b) $\mathcal{J}_{(g\circ f)}(1, 2, 0)$.

Aufgabe H32 (Integration im $\mathbb{R}^2$) (3+2=5 Punkte)

(a) Sei $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2 \text{ und } 3 \leq y \leq 5\}$ und $f(x, y) = \cos(2\pi x)e^{3y}$.

i. Warum existiert das Integral $\int_I f(x, y) d(x, y)$?

ii. Berechnen Sie $\int_1^2 \int_3^5 f(x, y)\, dy\, dx$ und $\int_3^5 \int_1^2 f(x, y)\, dx\, dy$.

(b) Berechnen Sie

$$\frac{d}{dx} \int_x^{2x^3} \ln(xy^2)\, dy.$$

Aufgabe H33 (Flächeninhalt- und Volumenbestimmung) (3+2=5 Punkte)

(a) Es seien:

$$\begin{aligned}
H_1 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, 0 \leq x \leq 2 \text{ und } 0 \leq y \leq \sqrt{1 - (x - 1)^2} \right\} \\
H_2 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -2 \leq x \leq 0 \text{ und } 0 \leq y \leq \sqrt{1 - (x + 1)^2} \right\} \\
H_3 &= \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| -\cos(y) - 1 \leq x \leq \cos(y) + 1 \text{ und } -\pi \leq y \leq 0 \right\}.
\end{aligned}$$

i. Skizzieren Sie H_1, H_2 und H_3 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

ii. Sei $H = H_1 \cup H_2 \cup H_3$. Berechnen Sie den Flächeninhalt von H als Integral $\int_H 1\, d(x, y)$.
Hinweis: Sie können benutzen, dass gilt: $\int \cos(t)^2\, dt = \frac{1}{2}(t + \sin(t)\cos(t))$.

(b) Berechnen Sie das Volumen der oberen Einheits-Halbkugel im $\mathbb{R}^3$, indem Sie die Funktion $f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ über die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \, x^2 + y^2 < 1 \right\}$ integrieren. *Hinweis:* Benutzen Sie auf $\mathbb{D}^2$ eine Transformation in Polarkoordinaten mit

$$g : (0; 1) \times (0; 2\pi) \to \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}.$$