Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2008
5./6./9. Juni

10. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G32 (Multiple Choice)

Welche Behauptungen sind für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und eine Stelle $a \in \mathbb{R}^n$ immer gültig?

(a) ☐ Wenn f in a total differenzierbar ist, dann ist f in a auch stetig.

☐ Wenn f in a stetig ist, dann ist f in a auch total differenzierbar.

☐ Wenn f in a partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch total differenzierbar.

☐ Wenn f in a partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch stetig.

☐ Wenn f in a stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch total differenzierbar.

☐ Wenn f in a stetig partiell differenzierbar ist, dann ist f in a auch stetig.

(b) Sei f nun zweimal stetig partiell differenzierbar.

☐ Wenn f in a ein lokales Maximum hat, so ist $\nabla f(a) = 0$ und $\mathrm{H}_f(a)$ negativ definit.

☐ Wenn $\nabla f(a) = 0$ und $\mathrm{H}_f(a)$ negativ definit ist, dann hat f in a ein lokales Maximum.

☐ Wenn f in a ein globales Maximum hat, so ist $\nabla f(a) = 0$.

☐ Die Matrix $\mathrm{H}_f(a)$ ist symmetrisch.

Aufgabe G33 (Richtungsableitung)

Für stetig differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ein $v \in \mathbb{R}^n$ mit $|v| = 1$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist die *Richtungsableitung* $\partial_v f(a)$ die Steigung von der in Richtung v eingeschränkten Funktion f in a:

$$\partial_v f(a) = \frac{d}{dt} f(a + tv)\Big|_{t=0}, \text{ das heißt: } \partial_v f(a) = g'(0) \text{ mit } g(t) = f(a + tv). \qquad (1)$$

Man kann beweisen, dass die Richtungsableitung auch durch folgende Formel gegeben ist:

$$\partial_v f(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle = \nabla f(a)^T \cdot v. \qquad (2)$$

Seien nun $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^2 \cdot (x - y) + \sqrt{2}x$ und $a = (0, 1)^T$ und $v = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)^T$.

(a) Berechnen Sie $\partial_v f(a)$ mithilfe der Definition (1).

(b) Berechnen Sie $\partial_v f(a)$ mithilfe der Formel (2).

Aufgabe G34 (Implizit gegebene Funktionen und Extrema unter Nebenbedingungen)

(a) Welche von x abhängige Funktion $y = h(x)$ wird durch die Gleichung $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ an der Stelle $(0, 1)$ implizit gegeben? Berechnen Sie dann einmal direkt $h'(0)$ und einmal mit Hilfe des Satzes über die implizite Funktion.

(b) Gegeben sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(\pi(x+1)y) + (x+1)^2 y$. Warum wird durch die Gleichung $g(x, y) = 0$ an der Stelle $(0, 0)$ eine Funktion $y = h(x)$ gegeben? Berechnen Sie $h'(0)$.

(c) Bestimmen Sie alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy^2$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 2x^2 + 6y^2 - 4 = 0$.

Aufgabe G35 (Taylor-Formel im Mehrdimensionalen)

Für eine $(k + 1)$-mal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lautet die Taylor-Formel:

$$f(a + v) = f(a) + \partial_v f(a) + \frac{(\partial_v)^2 f(a)}{2!} + \ldots + \frac{(\partial_v)^k f(a)}{k!} + R_{k+1}(a, v),$$

wobei $R_{k+1}(a, v)$ ein Restglied ist und die Summe davor das *k-te Taylor-Polynom von f an der Stelle a* heißt. Wir wollen nun diese Formel besser verstehen.

Wir wissen schon, was $\partial_v f(a)$ ist. Wenn nun $(\partial_v)^{i-1} f(x, y)$ für allgemeine x, y bekannt ist, erhält man $(\partial_v)^i f(x, y)$ folgendermaßen: Wir schreiben $h(x, y) := (\partial_v)^{i-1} f(x, y)$, dann ist $(\partial_v)^i f(x, y) = \partial_v h(x, y) = \langle \nabla h(x, y), v\rangle$. Seien nun wieder $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2x^2 \cdot (x - y) + \sqrt{2}x$ und $a = (0, 1)^T$

(a) Berechnen Sie $f(a)$, $h_1(x, y) = \partial_v f(x, y)$ und $\partial_v f(a)$ für allgemeine (x, y) und $v = (w, z)^T$.

(b) Berechnen Sie $h_2(x, y) = \partial_v h_1(x, y) = (\partial_v)^2 f(x, y)$ und $(\partial_v)^2 f(a)$ und ferner $h_3(x, y) = \partial_v h_2(x, y) = (\partial_v)^3 f(x, y)$ und $(\partial_v)^2 f(a)$ für allgemeine (x, y) und $v = (w, z)^T$.

(c) Berechnen Sie das dritte Taylor-Polyom von f an der Stelle a.

Hausübung

Aufgabe H29 (Laplace-Operator) (3+2=5 Punkte)

Für zweimal stetig partiell differenzierbares $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n)$ definiert man $\Delta f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ als $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$ und nennt Δ den *Laplace-Operator*.

(a) Berechnen Sie Δf_1 und Δf_2 für $f_1(x) = ax + b$ für Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ und für die Funktion $f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 - \sin(\pi(x_1 - x_2 + x_3))$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktionen $f_t(x, y) = \frac{1}{4\pi at} \cdot e^{-\frac{x^2+y^2}{4at}}$ mit $t > 0$ die *Wärmeleitungsgleichung* $\frac{\partial}{\partial t} f_t = a \cdot \Delta f_t$ erfüllen.

Aufgabe H30 (Extrema ohne und mit Nebenbedingungen) (1+3+2+3+1=10 Punkte)

Bei dieser Aufgabe geht es darum, Extrema der Funktion $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + xy + xz$ auf der Vollkugel $K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 \leq 0 \right\}$ zu finden.

(a) Begründen Sie, warum f auf K ein Maximum und ein Minimum annimmt.

(b) Berechnen Sie die Gradienten ∇g, ∇f und die Hesse-Matrix H_f.

(c) Bestimmen Sie die Extrema von f auf $K^\circ = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x^2 + y^2 + z^2 - 1 < 0 \right\}$, dem Inneren von K. Hierzu gehen Sie wie bei der Extremwertberechnung ohne Nebenbedingungen vor und überprüfen, ob Ihre Extremwert-Kandidaten in K° liegen.

(d) Bestimmen Sie nun die Extrema von f auf $\partial K = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle|\, x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \right\}$, dem Rand von K, das heißt bestimmen Sie die Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

(e) Was sind die Extremstellen von f auf K?