Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
29./30. Mai / 2. Juni

9. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G28 (Multiple Choice)

Bei den folgenden Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein.

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Behauptungen für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ immer stimmen:

☐ Wenn f in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist f in $a \in \mathbb{R}$ auch stetig.

☐ Wenn f in $a \in \mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f in $a \in \mathbb{R}$ auch differenzierbar.

☐ Wenn f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, dann ist f auf $\mathbb{R}$ auch stetig.

☐ Wenn f auf $\mathbb{R}$ stetig ist, dann ist f auf $\mathbb{R}$ auch differenzierbar.

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

☐ Stetige Funktionen besitzen immer ein Minimum und ein Maximum.

☐ Stetige Funktionen besitzen auf kompakten Mengen immer ein Minimum und ein Maximum.

☐ Stetige Funktionen besitzen auf kompakten Mengen immer genau ein Minimum und genau ein Maximum.

☐ Die offene Einheitskreissscheibe $\mathbb{D}^2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} < 1\right\}$ ist kompakt.

☐ Der Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2+y^2} = 1\right\}$ ist kompakt.

☐ Der Einheitskreis $\mathbb{S}^1$ ist die Höhenlinie einer stetigen Funktion.

(c) Entscheiden Sie, welche der folgenden Behauptungen für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ immer stimmen:

☐ Die partielle Ableitung von $f(x,y) = e^{2x+y} + x$ nach x ist $f_x(x,y) = 2e^{2x+y} + 1$.

☐ Der Satz von Schwarz lautet $f_{xy} = f_{yx}$ und gilt für alle stetig partiell differenzierbaren Funktionen.

☐ Der Gradient $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ von f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Zahl in $\mathbb{R}$.

☐ Der Gradient $\operatorname{grad} f(x) = \nabla f(x)$ von f an einer Stelle $x \in \mathbb{R}^n$ ist ein Vektor im $\mathbb{R}^n$.

Aufgabe G29 (Partielle Ableitungen)

Berechnen Sie jeweils die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_{xx}, f_{yy}, f_{xy}, f_{yx}$:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = 2xy^2 + 2x^2y$.

(b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x \ln(y)$.

(c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) = e^{\sin(x)y} + xy^3$.

Aufgabe G30 (Satz von Schwarz anwendbar?)

Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

(a) Ist der Satz von Schwarz anwendbar für f in $(x, y) \neq (0, 0)$?

(b) Berechnen Sie $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = f_x(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = f_y(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Berechnen Sie $f_{yx}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(0,h)-f_x(0,0)}{h}$ und vergleichen Sie mit $f_{xy}(0, 0) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0)-f_y(0,0)}{h}$.

(d) Ist der Satz von Schwarz anwendbar für f in $(x, y) = (0, 0)$?

Aufgabe G31 (Totale Ableitung und lineare Approximation)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x, y) = e^{xy} + \sin(\pi(x - y))$.

(a) Begründen Sie, warum f an jeder Stelle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ total differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die totale Ableitung, die in diesem Fall der Gradient $\nabla f(x, y)$ ist, an den Stellen $(x, y) = (1, 0)$ und $(x, y) = (0, 1)$.

(c) Bestimmen Sie die Gleichung der Ebene, die den Graphen von f an der Stelle $(0, 0)$ am besten approximiert.

Hausübung

Aufgabe H26 (Partielle Ableitungen) (3+3=6 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die partiellen Ableitungen $f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}, f_{xy}, f_{yz}, f_{xz}$:

(a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 + x^2y + x^2z + xy^2 + y^2z + xz^2 + yz^2 + xyz.$

(b) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\ f(x, y, z) = x \ln(yz) - ze^{x^3y^2}.$

Aufgabe H27 (Totale Ableitung) (1+3+2=6 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, f(x, y, z) = \cos(\pi(xyz)) - \pi x^2y^2z - 1.$

(a) Begründen Sie, warum f an jeder Stelle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ total differenzierbar ist.

(b) Bestimmen Sie die totale Ableitung an der Stelle $(x, y, z) = (1, 1, 1)$.

(c) Bestimmen Sie die lineare Approximation von f an der Stelle $(1, 1, 0)$.

Aufgabe H28 (Anwendung der totalen Ableitung: Newton-Verfahren) (1+2+4=7 Punkte)

Wir wollen einen Schnittpunkt zweier Ellipsen mit Hilfe des Newton-Verfahrens im $\mathbb{R}^2$ approximieren. Gegeben seien die beiden Ellipsen F und G durch die Gleichungen $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} - 1 = 0$ und $g(x, y) = \frac{(x+1)^2}{6{,}25} + \frac{(y-1)^2}{4} - 1 = 0.$

(a) Skizzieren Sie beide Ellipsen in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(b) Bestimmen Sie die Gradienten $\nabla f(x, y)$ und $\nabla g(x, y)$.

(c) Das Newton-Verfahren im $\mathbb{R}^2$ verläuft folgendermaßen: Wenn man (x_k, y_k) hat, bestimmt man erst Δx und Δy, indem man die lineare Approximationen für f und g einsetzt:

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}, y_{k+1}) &= 0 \approx f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)\Delta x + f_y(x_k, y_k)\Delta y \\ \text{und } g(x_{k+1}, y_{k+1}) &= 0 \approx g(x_k, y_k) + g_x(x_k, y_k)\Delta x + g_y(x_k, y_k)\Delta y \end{aligned}$$

und dann das resultierende lineare Gleichungssystem löst:

$$\begin{pmatrix} f_x(x_k, y_k) & f_y(x_k, y_k) \\ g_x(x_k, y_k) & g_y(x_k, y_k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x_k, y_k) \\ -g(x_k, y_k) \end{pmatrix}.$$

Man erhält dann (x_{k+1}, y_{k+1}), indem man $(x_k, y_k) + (\Delta x, \Delta y)$ rechnet.
Starten Sie mit $(x_0, y_0) = (0, 0)$ und bestimmen Sie die Näherung (x_2, y_2) für einen Schnittpunkt von F und G.