Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Jürgen Lehn
Dr. Andreas Rößler
Dipl.-Math. Nicole Nowak
Dipl.-Math. Hasan Gündoğan

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Sommersemester 2008
22./23./26. Mai

8. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Auf diesem Übungsblatt möchten wir uns zwei Themen der zweiten Hälfte der Veranstaltung, der Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Veränderlicher, nähern.

Aufgabe G24 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen einer Veränderlicher)
Welche der folgenden Funktionen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ sind stetig, welche differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung $f_i'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x \in D_i$ an.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$$

$$f_3 : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|\,; \quad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Aufgabe G25 ($\mathbb{R}^n$ als topologischer Raum)
Wir definieren für zwei Elemente $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ deren *Abstand* als $d(x, y) = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$. Mit diesem Abstand ergeben sich die Begriffe *Umgebung, innerer Punkt, offene Teilmenge, Randpunkt, abgeschlossene Teilmenge* [1], siehe Skript, Seiten 86 und 87.

(a) Geben Sie eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an, skizzieren Sie sie und begründen Sie kurz, warum sie offen ist.

(b) Geben Sie eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ an, skizzieren Sie sie und begründen Sie kurz, warum sie abgeschlossen ist.

(c) Gibt es Teilmengen des $\mathbb{R}^n$, die offen und gleichzeitig abgeschlossen sind? Wenn ja, welche?

(d) Gegeben sei die Menge $Q = \left\{ x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| -1 < x_1 \leq 1 \text{ und } -0,5 \leq x_2 < 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$.
   i. Skizzieren Sie Q.
   ii. Geben Sie einen inneren Punkt und einen Randpunkt von Q an.
   iii. Ist Q offen? Oder abgeschlossen? Weder noch?

Aufgabe G26 (Folgen und Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$)

(a) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $x_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, das heißt einen Grenzwert im $\mathbb{R}^n$ hat. Wie lautet dieser Grenzwert?

[1] Immer wenn diese Begriffe definiert werden können, redet man von einem *topologischen Raum* und wenn man einen topologischen Raum hat, kann man von stetigen Funktionen reden.

(b) Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ist h auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ stetig? Ist h in $(0, 0)$ stetig? Ist h auf $\mathbb{R}^2$ stetig?
Hinweis: Betrachten Sie für die zweite Frage die Folge aus (a) mit $n = 2$.

Aufgabe G27 (Kompaktheit und Stetigkeit)

Eine Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *kompakt*, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist, das heißt sie enthält alle ihre Randpunkte und wird von einer genügend großen Kugel umfasst. Kompaktheit ist einer der wichtigsten Begriffe in der Mathematik überhaupt. Einer der Gründe dafür ist der Satz vom Minimum und Maximum:

Satz: Sei K kompakt und $f : K \to \mathbb{R}$ stetig. Dann hat f ein Minimum und ein Maximum, das heißt, es gibt $a, b \in K$, so dass für alle $x \in K$ gilt: $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

(a) Geben Sie eine kompakte Teilmenge jeweils des $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^n$ (allgemein) an. Geben Sie zwei *nichtkompakte* Teilmengen des $\mathbb{R}$ an, eine abgeschlossen und die andere beschränkt.

(b) Welche Quadriken im $\mathbb{R}^2$ und welche im $\mathbb{R}^3$ sind kompakt?

(c) Betrachten Sie $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $h(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Nimmt h ein Maximum an? Und nimmt h eingeschränkt auf den Einheitskreis $\mathbb{S}^1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1 \right\}$ ein Maximum an?

Hausübung

Aufgabe H23 (Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen einer Veränderlicher) (2+2+3=7 Punkte)

Welche der folgenden Funktionen $f_i : D_i \to \mathbb{R}$ sind stetig, welche differenzierbar? Geben Sie gegebenenfalls die Ableitung $f_i'(x)$ an einer beliebigen Stelle $x \in D_i$ an.

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^{\left(x^2\right)}; \quad f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|^2; \quad f_3 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(x) \cdot \sin(\cos(x + \pi)).$$

Aufgabe H24 (Stetigkeit im $\mathbb{R}^n$) (1+2+1=4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2y^4}{x^4+y^6} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ist h auf $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ stetig? Ist h in $(0, 0)$ stetig? Ist h auf $\mathbb{R}^2$ stetig?
Hinweis: Betrachten Sie für die zweite Frage eine allgemeine Folge $(x_k, y_k)_{k \in \mathbb{N}}$, die gegen (0,0) konvergiert und benutzen Sie die Ungleichung $ab \leq \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$.

Aufgabe H25 (Kompaktheit und Stetigkeit) (2+2=4 Punkte)

Sei $E = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \middle| \sqrt{\frac{1}{4}x_1^2 + 4x_2^2} \leq 1 \right\}$.

(a) Ist E kompakt?

(b) Nimmt die Funktion $f : E \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto \frac{\sin(x_1^2 - x_2)}{e^{x_1} + |x_2^2|}$ ein Minimum an? Begründen Sie.