Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
15./16./19. Mai

7. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G20 (Multiple Choice)

(a) Suchen Sie in Ihrem Skript die Definition für eine orthogonale Matrix. Welche der folgenden Eigenschaften erfüllen orthogonale Matrizen?

- ☐ Sie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann gilt $A^{-1} = A^T$
- ☐ Die Spalten der Matrix bilden keine Basis des entsprechenden Vektorraums $\mathbb{R}^n$.
- ☐ Die zur Matrix zugehörige lineare Abbildung erhält die Länge von Vektoren.
- ☐ Jeder Spaltenvektor in der Matrix hat Länge 1.
- ☐ Sie $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ orthogonal, dann ist auch $A + A^T$ wieder orthogonal.

(b) In Ihrem Skript finden Sie verschiedene Kriterien für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen. Welche der folgenden Matrizen sind sicher diagonalisierbar?

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 & 2 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 9 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 2 & 13 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Aufgabe G21 (Orthonormalbasis, Koordinaten eines Vektors)

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad v_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix},$$

eine orthonormierte Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Geben Sie die Koordinaten des Vektors

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

in Bezug auf die gegebenen Basisvektoren an.

Aufgabe G22 (Quadriken, Hauptachsentransformation, Kurventypen)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{3}{2}.$$

Von welchem Flächentyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Aufgabe G23 (Hauptachsentransformation)

Betrachte die durch

$$3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 + 12x_1 + 4x_2 + 1 = 0$$

beschriebene Menge im $\mathbb{R}^2$. Schreibe diese Gleichung als $x^T A x + b^T x = c$ und führe die Hauptachsentransformation durch. Um was für ein geometrisches Gebilde handelt es sich?

Hausübung

Aufgabe H19 (Kurventypen von Quadriken) (6 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 2 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2+6\sqrt{2} \\ 2+6\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = 20.$$

Von welchem Flächentyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T A x + b^T x + c = 0?$$

Aufgabe H20 (Wiederholung Basistransformation) (4 Punkte)

Motivation für Basistransformation: Wir haben gelernt, dass man lineare Abbildungen als Matrizen angeben kann. Ist uns eine Abbildung als Matrix gegeben, so meist in Bezug auf die Standardbasis. Das hat den Sinn, dass wir Vektoren deren Koordinaten in Standardbasis gegeben sind, mit dieser Matrix durch Multiplikation abbilden können. Doch was wissen wir beispielsweise über die Abbildung, die durch die Matrix A unten beschrieben ist?

Es ist schwer, aus einer Matrix mit vielen Einträgen herauszulesen, was diese Abbildung geometrisch wirklich tut. Daher sucher wir nach einer Basis, in welcher die Form der Matrix günstig ist, um abzulesen, was die Abbildung geometrisch bewirkt. Am erstrebenswertesten ist eine Diagonalmatrix. Auf der Diagonalen werden dann die Eigenwerte der Matrix stehen. An diesen Diagonaleinträgen können wir ablesen, welche Streckungen, Stauchungen oder Spiegelungen die Abbildung in Bezug auf die verwendeten Basisvektoren bewirkt. Die Basisvektoren sind genau die Eigenvektoren, da, nach Definition, ein Eigenvektor genau auf ein Vielfaches seiner selbst abgebildet wird.

Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix P an, für die $P^T AP$ diagonal ist und berechnen Sie $P^T AP$.

Aufgabe H21 (Quadriken, Hauptachsentransformation, Kurventypen) (5 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \frac{1}{3}.$$

Von welchem Kurventyp ist die Lösungsmenge der quadratischen Gleichung

$$x^T Ax + b^T x + c = 0?$$

Skizziere die Lösungsmenge im ursprünglichen Koordinatensystem.