Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT
Sommersemester 2008
8./9./13. Mai

6. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G17 (Multiple Choice)

(a) Welche der folgenden Aussagen über algebraische und geometrische Vielfachheit von Eigenwerten sind wahr?

- ☐ algebraische Vielfachheit $\leq$ geometrische Vielfachheit
- ☐ geometrische Vielfachheit $\leq$ algebraische Vielfachheit
- ☐ Falls das charakteristische Polynom einer quadratischen Matrix in Linearfaktoren zerfällt, und die algebraische Vielfachheit für alle Eigenwerte der geometrischen Vielfachheit entspricht, dann ist die Matrix diagonalisierbar.
- ☐ Für jeden Eigenwert einer quadratischen Matrix ist die geometrische Vielfachheit mindestens 1.

(b) Finden Sie in Ihrem Skript die Definition für eine Bilinearform. Entscheiden Sie nun, welche der angegebenen Funktionen $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Bilinearformen sind.

- ☐ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1^2 + w_2 v_2 + 3w_1$
- ☐ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1 w_1 + v_2 w_2$
- ☐ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = v_1 v_2 w_1 w_2$
- ☐ $F\left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}\right) = 5v_1 w_1 + v_1 w_2 + 3v_2 w_2$

Aufgabe G18 (Eigenwerte und Eigenvektoren)

Für $a = 2$ und $a = -2$ betrachten wir die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & a-2 & a \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne in beiden Fällen die Eigenwerte der Matrix. Hier kann es hilfreich sein, a zunächst als Parameter in die Rechnung eingehen zu lassen.

(b) Im Fall $a = 2$ bestizt A Eigenvektoren, die eine Orthonormalbasis $\{u_1, u_2, u_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ bilden, d.h. sie haben jeweils Länge 1 und sie stehen paarweise senkrecht aufeinander. Bestimme eine solche Basis und verifiziere, dass für die Matrix $U = (u_1, u_2, u_3)$

$$U^{-1}AU = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

gilt, wobei $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ die Eigenwerte von A sind. (Beachte, dass Matrizen, deren Spaltenvektoren Länge 1 haben und paarweise aufeinander senkrecht stehen, orthogonale Matrizen sind, d.h. es gilt $U^{-1} = U^T$.)

(c) Gibt es auch im Fall $a = -2$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren von A?

Aufgabe G19 (Gram-Schmidt Orthogonalisierung)
Gegeben seien die Vektoren

$$b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; b_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Konstruiere eine Orthonormalbasis der linearen Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$.

(b) Zeige, daß der Vektor $v = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{9}{2} \end{pmatrix}^T$ in der lineare Hülle $\mathrm{lin}(b_1, b_2, b_3)$ liegt und stelle ihn als Linearkombination der in Teil (a) konstruierten Basis dar.

Hausübung

Aufgabe H16 (Lineare Abbildungen und zugehörige Eigenwerte und Eigenräume)
Seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängige Vektoren. Wie sehen die reellen Eigenwerte und die zugehörigen Eigenräume der folgenden linearen Abbildungen aus:

(a) Spiegelung an der von u und v aufgespannten Ebene,

(b) orthogonale Projektion auf die von u und v aufgespannte Ebene,

(c) Drehung um die Achse, die von v erzeugt wird.

Beachten Sie in (c) die Unterschiede je nach Drehwinkel.

Aufgabe H17 (Diagonalähnliche Matrix, Diagonalisieren)
Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie eine invertierbare Matrix $T \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{R}^{(3,3)}$, so daß $D = T^{-1}AT$.

Aufgabe H18 (Orthonormalbasis, Gram-Schmidt)
Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $\mathrm{lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ mit

$$v_1 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 := \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$