Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündoğan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
24./25./28. April

4. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G9 (Multiple Choice)

Bei den folgenden Aufgaben können auch mehrere Antworten richtig sein.

(a) Entscheiden Sie, welche der folgenden Mengen U_i, $i = 1, \ldots, 5$, Untervektorräume der Vektorräume V_i, $i = 1, \ldots, 5$, sind.

- ☐ $V_1 = \mathbb{R}^3, U_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : u_1 = u_2 = u_3 = 0\}$
- ☐ $V_2 = \mathbb{R}^2, U_2 = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi\right\}$
- ☐ $V_3 = \mathbb{R}^2, U_3 = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^2 : \vec{u} = r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ oder } \vec{u} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}, r, s \in \mathbb{R}\right\}$
- ☐ $V_4 = \mathbb{R}^3, U_4 = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : 3u_3 = 2(u_1 - u_2) + 5\}$
- ☐ $V_5 = \mathbb{R}^3, U_5 = \left\{\vec{u} \in \mathbb{R}^3 : 0 = \left[\vec{u} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right\}$

(b) Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

- ☐ Jeder Vektorraum V besitzt nur eine Basis.
- ☐ Jede lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Matrix bezüglich der Standardbasis.
- ☐ Eine lineare Abbildung bildet den Nullvektor immer auf den Nullvektor ab.
- ☐ Die Basis eines Vektorraums ist nicht immer ein Erzeugendensystem für den Vektorraum.
- ☐ Die Summe zweier symmetrischer Matrizen gleicher Dimension ist wieder eine symmetrische Matrix.
- ☐ Eine Matrix A für die das Gleichungssystem $A\vec{x} = 0$ eine andere Lösung als $\vec{x} = \vec{0}$ ist invertierbar.

(c) Prüfen Sie, welche der folgenden Matrizen zu den beschriebenen linearen Abbildungen gehören.

- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist bezüglich der Standardbasis eine Projektion auf die x-Achse.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ bildet den ersten Basisvektor auf $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und den zweiten Basisvektor auf $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ab.
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist bezüglich der Standardbasis eine Projektion auf x- und y-Achse.
- ☐ $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ ist bezüglich der Standardbasis eine Projektion auf die Gerade im $\mathbb{R}^2$ mit der Gleichung $x = y$.

Aufgabe G10 (Lineare Abbildungen)

Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^3$, $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ gegeben. Untersuche die folgenden Abbildungen jeweils auf Linearität.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (x + 2, x)^T$.

(b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = a \times x$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = Ax + b$.

Aufgabe G11 (Matrizen von linearen Abbildungen)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Projektion auf die y-Achse.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um den Ursprung mit dem Drehwinkel $\pi/2$.
Sei $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ die Abbildung mit $h\left(\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T\right) = 2x + 3y$.

a) Berechnen Sie die Matrizen A, B, C der linearen Abbildungen f, g, h bezüglich der kanonischen Basis.

b) Was geschieht geometrisch in einem Koordinatensystem mit dem Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ durch Hintereinanderausführung der Abbildungen f und g? Betrachten Sie sowohl $f \circ g$ als auch $g \circ f$ und interpretieren Sie Ihre Beobachtung.

c) Berechnen Sie die Matrix D, welche die lineare Abbildung $h \circ f \circ g$ beschreibt und berechnen Sie $D \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Aufgabe G12 (Basistransformation)

Wir betrachten im $\mathbb{R}^3$ die Parallelprojektion π in Richtung des Vektors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf die durch die Gleichung $x - y + z = 0$ bestimmte Ebene. Bestimme die Matrix von π zuerst bezüglich einer „geeigneten“ Basis und dann bezüglich der kanonischen Basis.
Anmerkung: Bei einer Parallelprojektion, kann man sich vorstellen, dass die Stahlen einer Lampe aus genau einer gegebenen Richtung kommen und wir den Schatten auf einer gegebenen Ebene suchen.

Hausübung

Aufgabe H10 (Lineare Abbildungen) (4 Punkte)

Sind die folgenden Abbildungen jeweils linear? Begründen Sie. Dabei seien $n, m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gegeben.

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = xy$.

(b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) = (2y, x + y)^T$.

(c) $f : C^1(\mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R})$ mit $(f(u))(x) = u'(x)$.

Kommentar zur Notation: $C^1(\mathbb{R}))$ steht für den Vektorraum aller einmal stetig differenzierbaren Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $C^0(\mathbb{R})$ für den Vektorraum aller stetigen Funktionen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe H11 (Basis und Koordinaten von Vektoren) (7 Punkte)

Gegeben seine die Vektoren $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b_3} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ aus $\mathbb{R}^3$.

(a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\vec{b_1}$, $\vec{b_2}$ und $\vec{b_3}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

(b) Geben Sie die Matrizen B^{-1} und B an, mit denen die Koordinaten eines Vektors $\vec{x}$ bzgl. der Standardbasis in die Koordinaten von $\vec{x}$ bzgl. der Basis $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ transformiert werden können bzw. umgekehrt.

(c) Berechne die Koordinaten von $(2, 2, 3)^T$ bzgl. der Basis $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$.

(d) Es sei $\vec{v}$ der Vektor, welcher bzgl. der Basis $\{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$ die Koordinaten $(1, 0, -1)^T_B$ besitzt. Bestimmen Sie die Koordinaten von $\vec{v}$ bzgl. der Standardbasis.

Aufgabe H12 (Matrizen von linearen Abbildungen) (4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Streckung des Vektors $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}^T$ um den Faktor 5 in x-Richtung und um den Faktor 3 in y-Richtung.
Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Spiegelung an der Winkelhalbierenden $\{(x, -x) | x \in \mathbb{R}\}$.

a) Bestimmen Sie die Matrizen der linearen Abbildungen $f, g, f \circ g, g \circ f$ bezüglich der kanonischen Basis. Was stellen Sie fest?

b) Was geschieht geometrisch durch eine Hintereinanderausführung $f \circ g$ mit dem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}^T$?