Fachbereich Mathematik
Prof. J. Lehn
Hasan Gündogan, Nicole Nowak

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Sommersemester 2008
10./11./14. April

2. Übungsblatt zur „Mathematik II für BI, MaWi, WI(BI), AngGeo“

Gruppenübung

Aufgabe G3 (Lineare Unabhängigkeit, Linearkombination, Basis)
Gegeben seien die folgenden Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(a) Prüfen Sie, ob die Vektoren linear unabhängig sind.

(b) Geben Sie die Menge aller Linearkombinationen $\text{Lin}(v_1, v_2, v_3)$ an.

(c) Was für ein Gebilde stellt diese Menge im $\mathbb{R}^3$ dar?

(d) Finden Sie eine Basis für $\text{Lin}(v_1, v_2, v_3)$ und geben Sie die Dimension an.

(e) Finden Sie einen Vektor in $\mathbb{R}^3$, der nicht als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden kann und begründen Sie warum dies nicht geht.

Aufgabe G4 (Vektorraum)
Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{P}_2 := \{a_0 + a_1x + a_2x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ der Polynome vom Grad ≤ 3.
Gegeben seien die Polynome $p_1(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$ und $p_2(x) = (x-2)(x-3)$ aus $\mathbb{P}_2$.

(a) Stellen Sie das Polynom $p_3(x) = 5x$ als Linearkombination von p_1 und p_2 dar.

(b) Zeigen Sie, dass p_1 und p_2 linear unabhängig sind.

(c) Bilden diese beiden Polynome eine Basis von $\mathbb{P}_2$? Begründen Sie.

Aufgabe G5 (Lineare Gleichungssysteme)
Bestimmen Sie mit dem Gauß-Jordan Eliminations-Algorithmus die *vollständige* Lösungsmenge des Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H4 ((Unter-)Vektorraum) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Menge $\mathbb{P}_3$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 3 einen Untervektorraum des Raums $\mathbb{P}_7$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Höchstgrad 7 bildet.

Aufgabe H5 (Erzeugendensystem, Basis) (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ bilden und stellen Sie v_4 als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3 dar. Zeigen Sie weiterhin, dass v_1, v_2 und v_3 eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe H6 (Lineare Gleichungssysteme) (5 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 5 \\ 32 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$.