Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL (fortges.)

o.B.d.A.: $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}(S)$, universell-pränex, S habe Konstanten

Φ erfüllbar $\Leftrightarrow$ Φ hat ein Herbrand-Modell $\mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R\in S}\big) \models \Phi$

$\Leftrightarrow$ für alle $R \in S$ (n-st.) existieren $R^{\mathcal{H}} \subseteq T_0(S)^n$, sodass $\mathcal{H} = \big(\mathcal{T}_0(S), (R^{\mathcal{H}})_{R\in S}\big) \models \Phi$

$\mathcal{V} := \{p_\alpha \colon \alpha = \mathtt{Rt_1 \ldots t_n};\, R \in S;\, t_1, \ldots, t_n \in T_0(S) \text{ für } n\text{-stelliges } R\}$
$\mathcal{V}$-Interpretationen $\mathcal{I}$ beschreiben mögliche $\mathcal{H}$

bijektive Korrespondenz $\mathcal{H} \leftrightarrow \mathcal{I}$:

von $\mathcal{I}$ zu $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{I})$: $R^{\mathcal{H}} = \Big\{(t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n \colon \mathfrak{I}(p_{\mathtt{Rt_1 \ldots t_n}}) = 1\Big\}$

von $\mathcal{H}$ zu $\mathcal{I} = \mathcal{I}(\mathcal{H})$: $\mathfrak{I} \colon \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{B}$

$$p_\alpha \longmapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } \mathcal{H} \models \alpha, \\ 0 & \text{falls } \mathcal{H} \models \neg\alpha. \end{cases}$$

Beispiel

$S = \{R, Q, f\}$ R (2-st.), Q (1-st.), Relationssymbole; f (1-st.), Funktionssymbol

Behauptung: Φ: $\begin{cases} \varphi_1 = \forall x \forall y \big(Rxy \to (Qx \leftrightarrow \neg Qy)\big) \\ \varphi_2 = \forall x (Rxfx \vee Rfxx) \\ \varphi_3 = \forall x \forall y \big(\neg Rxy \to Rxffy\big) \end{cases}$ unerfüllbar

$S_c := S \cup \{c\}$ $\quad T_0(S_c) = \{c, fc, ffc, fffc, \ldots\} = \{f^n c \colon n \in \mathbb{N}\}$

AL-Variablen für die Reduktion:

q_n $(= p_{\mathtt{Qf^n c}})$ für die Atome $Qf^n c$, $(n \in \mathbb{N})$,
$r_{\ell,m}$ $(= p_{\mathtt{Rf^\ell cf^m c}})$ für die Atome $Rf^\ell c f^m c$, $(\ell, m \in \mathbb{N})$.

zugeh. AL-Formeln $\begin{cases} [\![\varphi_1]\!]^{\mathsf{AL}} = \big\{r_{\ell,m} \to (q_\ell \leftrightarrow \neg q_m) : \ell, m \in \mathbb{N}\big\} \\ [\![\varphi_2]\!]^{\mathsf{AL}} = \big\{r_{\ell,\ell+1} \vee r_{\ell+1,\ell} : \ell \in \mathbb{N}\big\} \\ [\![\varphi_3]\!]^{\mathsf{AL}} = \big\{\neg r_{\ell,m} \to r_{\ell,m+2} : \ell, m \in \mathbb{N}\big\} \end{cases}$

Erfüllbarkeit: Reduktion auf AL (fortges.)

für $\varphi = \forall x_1 \ldots \forall x_n \xi(x_1, \ldots, x_n) = \forall \mathbf{x} \xi(\mathbf{x})$, ξ quantorenfrei
$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathcal{I})$:

$\mathcal{H} \models \varphi$ gdw. $\mathcal{H} \models \xi[\mathbf{t}]$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

gdw. $\mathcal{I} \models \xi(\mathbf{t})^{\mathsf{AL}}$ für alle $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in T_0(S)^n$

erhalte $\xi(\mathbf{t})^{\mathsf{AL}} \in \mathsf{AL}(\mathcal{V})$ aus $\xi(\mathbf{t})$ durch Ersetzen von Atomen $\alpha = \mathtt{R}\ldots$ durch AL-Variablen $p_\alpha = p_{\mathtt{R}\ldots}$

Beispiel

$\left.\begin{array}{r} \xi = Rxfy \vee (Ufx \to Wxyfz) \\ \mathbf{t} = (c, fc, d) \text{ für } (x, y, z) \end{array}\right\}$ $\xi(c, fc, d)^{\mathsf{AL}} = p_{\mathtt{Rcffc}} \vee (p_{\mathtt{Ufc}} \to p_{\mathtt{Wcfcfd}})$

für $[\![\Phi]\!]^{\mathsf{AL}} := \bigcup_{\forall \mathbf{x} \xi \in \Phi} \{\xi(\mathbf{t})^{\mathsf{AL}} \colon \mathbf{t} \text{ in } T_0(S)\}$ gilt:

$\boxed{\Phi \text{ erfüllbar gdw. } [\![\Phi]\!]^{\mathsf{AL}} \text{ erfüllbar}}$

Unerfüllbarkeit von Φ folgt aus Unerfüllbarkeit von

$$\underbrace{\begin{array}{l} r_{0,0} \to (q_0 \leftrightarrow \neg q_0), \\ r_{0,1} \to (q_0 \leftrightarrow \neg q_1), \\ r_{1,0} \to (q_1 \leftrightarrow \neg q_0), \\ r_{0,2} \to (q_0 \leftrightarrow \neg q_2), \\ r_{1,2} \to (q_1 \leftrightarrow \neg q_2), \\ r_{2,1} \to (q_2 \leftrightarrow \neg q_1), \end{array}}_{\in [\![\varphi_1]\!]^{\mathsf{AL}}} \quad \underbrace{\begin{array}{l} r_{0,1} \vee r_{1,0}, \\ \\ \\ \\ \\ r_{1,2} \vee r_{2,1}, \end{array}}_{\in [\![\varphi_2]\!]^{\mathsf{AL}}} \quad \underbrace{\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \neg r_{0,0} \to r_{0,2} \end{array}}_{\in [\![\varphi_3]\!]^{\mathsf{AL}}}$$

FO Kompaktheit

Kompaktheitssatz (Endlichkeitssatz)

Version 1: (Erfüllbarkeit)

Für $\Phi \subseteq$ FO sind äquivalent:

(i) Φ erfüllbar.

(ii) Jede endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$ ist erfüllbar.

Version 2: (Folgerungsbeziehung)

Für $\Phi \subseteq$ FO, $\varphi \in$ FO sind äquivalent:

(i) $\Phi \models \varphi$.

(ii) $\Phi_0 \models \varphi$ für eine endliche Teilmenge $\Phi_0 \subseteq \Phi$.

Version 1 $\Leftrightarrow$ Version 2 (zur Übung!)
Version 1 für universell-pränexes $\Phi \subseteq \mathrm{FO}_0^{\neq}$: Reduktion auf AL

Konsequenzen: die Stärken des Endlichkeitssatzes die Schwächen von FO

mit Kompaktheitsargumenten findet man:

beliebig große endliche Modelle $\Rightarrow$ unendliche Modelle

zu Φ betrachte $\Phi \cup \{\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \neg x_i = x_j : n \geqslant 1\}$

unendliche Modelle $\Rightarrow$ beliebig große unendliche Modelle

zu Φ betrachte $\Phi \cup \{\neg c_i = c_j : i \neq j; i, j \in I\}$
für neue Konstanten $(c_i)_{i \in I}$

$\Rightarrow$ keine unendliche Struktur in FO bis auf Isomorphie charakterisierbar

Nichtstandardmodelle

von (unendlichen) Standardmodellen in FO
ununterscheidbare Strukturen

z.B. $\mathcal{N}^*$ zu $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, 0, 1, <)$
Nichtstandardmodell der Arithmetik mit
'unendlich großen natürlichen Zahlen'

Logik-Kalküle

syntaktische Beweiskalküle

Beweise der	Unerfüllbarkeit	bzw. der	Allgemeingültigkeit
	Resolution		Sequenzenkalkül

Resolution — vgl. AL Resolution

Widerlegungskalkül: Unerfüllbarkeitsbeweise

wir behandeln: **Grundinstanzen-Resolution (GI-Resolution)**

Gegenstand: $\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauselmengen K
(universelle $\mathrm{FO}^{\neq}$-Satzmengen Φ)

Beweisziel: Ableitung der (unerfüllbaren) leeren Klausel $\square$

Korrektheit: $\square$ ableitbar aus $K \Rightarrow K$ unerfüllbar.

Vollständigkeit: K unerfüllbar $\Rightarrow$ $\square$ ableitbar aus K.

FO-Klauselmengen

universelle (skolemisierte) $\mathrm{FO}^{\neq}$-Sätze in Klauselform:

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \, \xi \;\equiv\; \forall x_1 \ldots \forall x_k \underbrace{\bigwedge_{C \in K} \bigvee C}_{\text{q-fr. Kern in KNF}}$$

$\xi \equiv K$ für endliche Klauselmenge K über $\mathrm{FO}^{\neq}$-Literalen

$\mathrm{FO}^{\neq}$-Literale
relationale Atome oder negierte relationale Atome λ, $\overline{\lambda} \equiv \neg\lambda$

$\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauseln: endliche Mengen C von $\mathrm{FO}^{\neq}$-Literalen
für $C = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$: $C \equiv \bigvee C = \bigvee_{i=1,\ldots,k} \lambda_i$

$\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauselmengen: Mengen K von $\mathrm{FO}^{\neq}$-Klauseln

Klauselmengen und universell-pränexe Sätze

semantisch identifiziere Klauselmenge mit Satzmenge:

$$K \equiv \Big\{ \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } C} \bigvee C : C \in K \Big\}$$

$$\Big(\equiv \underbrace{\forall x_1 \ldots \forall x_n}_{\text{alle Variablen in } K} \bigwedge_{C \in K} \bigvee C \qquad \text{für endliches } K \Big)$$

Korrespondenzen:

endliche FO$^{\neq}$ Klauselmengen	$\leftrightsquigarrow$	universell-pränexe FO$^{\neq}$-Sätze
FO$^{\neq}$ Klauselmengen	$\leftrightsquigarrow$	universell-pränexe FO$^{\neq}$-Satzmengen

Übersetzungs-Beispiel

$\varphi = \forall x \forall y \Big(Rxy \to (Qx \leftrightarrow \neg Qy) \Big)$

relevante Atome: $\alpha = Rxy$, $\beta_1 = Qx$ und $\beta_2 = Qy$

$\varphi = \forall x \forall y \Big(\alpha \to (\beta_1 \leftrightarrow \neg \beta_2) \Big)$

Kern von φ in KNF (z.B.):

$$\underbrace{(\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \neg\beta_1)}_{\equiv 1} \wedge (\neg\alpha \vee \beta_1 \vee \beta_2) \wedge (\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \neg\beta_1) \wedge \underbrace{(\neg\alpha \vee \neg\beta_2 \vee \beta_2)}_{\equiv 1}$$

$$K = \Big\{ \{\neg\alpha, \beta_1, \beta_2\}, \{\neg\alpha, \neg\beta_1, \neg\beta_2\} \Big\}$$
$$= \Big\{ \{\neg Rxy, Qx, Qy\}, \{\neg Rxy, \neg Qy, \neg Qx\} \Big\}$$

Grundinstanzen-Resolution (GI)

Idee: Übertragung von AL-Resolution gemäß Reduktionsansatz
ähnlich wie schon für andere Erfüllbarkeitsargumente

Grundinstanzen einer Klausel C über Literalen $\lambda \in \text{FO}^{\neq}_n$:

$$C(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n) := \{\lambda(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$$
mit $t_i \in T_0(S)$

Grundinstanzenmenge einer Klauselmenge K:

$$\text{GI}(K) := \Big\{ C(t_1/x_1, \ldots) \colon C \in K, t_i \in T_0(S) \Big\}$$

- es gilt $K \models \text{GI}(K)$.

und aus dem Satz von Herbrand:

- K und GI(K) *erfüllbarkeitsäquivalent*.

GI-Resolution: Resolventen

C_1, C_2, C Klauseln von variablenfreien FO$^{\neq}(S)$-Literalen

C ist *Resolvente* von C_1 und C_2
(bezüglich des Literals λ), wenn

$$\lambda \in C_1, \quad \overline{\lambda} \in C_2, \quad \text{und } C = (C_1 \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2 \setminus \{\overline{\lambda}\})$$

$$C_1 = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \underline{\lambda}\} \qquad C_2 = \{\lambda'_1, \ldots, \lambda'_\ell, \overline{\underline{\lambda}}\}$$

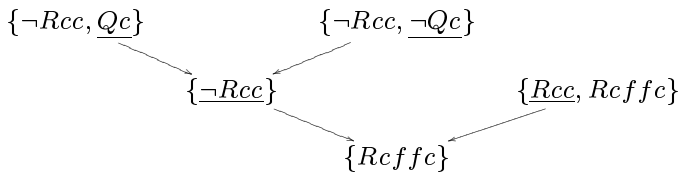
$$C = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda'_1, \ldots, \lambda'_\ell\}$$

Zu Klauselmenge K über variablenfreien FO$^{\neq}(S)$-Literalen:

$$\text{Res}^*(K) = \text{Abschluß von } K \text{ unter Resolventenbildung}$$

Beispiel

über Grundinstanzen von
$\{\neg Rxy, Qx, Qy\}$, $\{\neg Rxy, \neg Qx, \neg Qy\}$ und $\{Rxx, Rxfffx\}$:



$$\left.\begin{array}{c}\forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy\big)\\ \forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy\big)\\ \forall x\big(Rxx \vee Rxfffx\big)\end{array}\right\} \models Rcffc$$

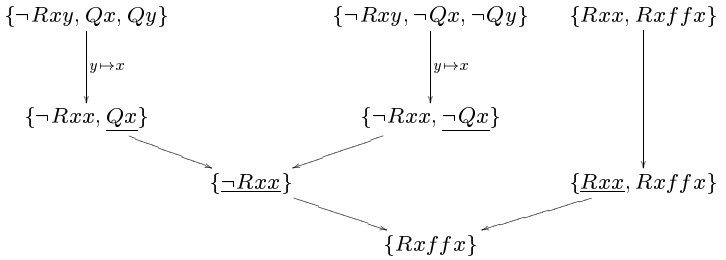
allgemeinere Resolution

Idee: nicht notwendig zu Grundinstanzen absteigen
Resolution nach Substitution von Termen mit Variablen

Substitutionsinstanz zu $\sigma = (t_1, \ldots, t_n) \in T(S)^n$:
$C^\sigma = \{\lambda^\sigma \colon \lambda \in C\} = \{\lambda(t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n) \colon \lambda \in C\}$

Resolution von C_1 und C_2 zu C falls für geeignete σ_1 und σ_2:
$\lambda \in C_1^{\sigma_1}, \overline{\lambda} \in C_2^{\sigma_2}, C = (C_1^{\sigma_1} \setminus \{\lambda\}) \cup (C_2^{\sigma_2} \setminus \{\overline{\lambda}\})$

Bsp.:



$\forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee Qx \vee Qy\big), \forall x\forall y\big(\neg Rxy \vee \neg Qx \vee \neg Qy\big), \forall x\big(Rxx \vee Rxfffx\big) \models \forall xRxfffx$

GI-Resolution: Resolutionssatz

Korrektheit und *Vollständigkeit* von GI-Resolution
für die Unerfüllbarkeit von universell-pränexen FO$^{\neq}(S)$-Satzmengen
in Klauselform

Resolutionssatz

Für FO$^{\neq}(S)$-Klauselmengen K sind äquivalent:

(i) K unerfüllbar.

(ii) GI(K) unerfüllbar.

(iii) $\square \in$ Res*(GI(K)).

(iii) $\Rightarrow$ (i): $C \in$ Res*(GI(K)) impliziert, dass $K \models C$
$\square \equiv 0$ unerfüllbar.

(i) $\Leftrightarrow$ (ii): Erfüllbarkeitsäquivalenz (Herbrand).

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Vollständigkeit von AL Resolution + Reduktion.