Syntax: freie Variablen

$$\begin{array}{rcl} \text{frei}\colon \text{FO}(S) & \longrightarrow & \mathcal{P}(\mathcal{V}) \\ \varphi & \longmapsto & \text{frei}(\varphi) \subseteq \mathcal{V} \end{array}$$

induktiv: frei$(\varphi) :=$ var(φ) für atomare φ.
frei$(\neg\varphi) :=$ frei(φ).
frei$(\varphi \wedge \psi) =$ frei$(\varphi \vee \psi) :=$ frei$(\varphi) \cup$ frei(ψ).
frei$(\exists x\varphi) =$ frei$(\forall x\varphi) :=$ frei$(\varphi) \setminus \{x\}$.

Formeln ohne freie Variablen: *Sätze*.
FO$_n(S) := \{\varphi \in \text{FO}(S)\colon \text{frei}(\varphi) \subseteq \mathcal{V}_n\}$.
Schreibweise: $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für $\varphi \in$ FO$_n(S)$.

Variablen in φ, die nicht frei vorkommen: *gebunden*

Bsp: frei$(0 < fx) = \{x\}$
frei$(\forall x \neg x = fx) = \emptyset$
frei$(0 < fx \wedge \forall x \neg x = fx) = \{x\}$

Semantik von $\mathrm{FO}(S)$

Wahrheitswerte $\varphi^{\mathfrak{I}}$ für FO(S)-Formeln über S-Interpretation $\mathfrak{I}$

induktive Definition von $\varphi^{\mathfrak{I}}$

atomare φ:	$(t_1 = t_2)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $t_1^{\mathfrak{I}} = t_2^{\mathfrak{I}}$. $(Rt_1 \dots t_n)^{\mathfrak{I}} = 1$ gdw. $(t_1^{\mathfrak{I}}, \dots, t_n^{\mathfrak{I}}) \in R^{\mathcal{A}}$.
Negation:	$(\neg\varphi)^{\mathfrak{I}} := 1 - \varphi^{\mathfrak{I}}$.
Konjunktion:	$(\varphi \wedge \psi)^{\mathfrak{I}} := \min(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.
Disjunktion:	$(\varphi \vee \psi)^{\mathfrak{I}} := \max(\varphi^{\mathfrak{I}}, \psi^{\mathfrak{I}})$.
Quantoren:	$(\exists x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \max\big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]}\colon a \in A\big)$. $(\forall x\varphi)^{\mathfrak{I}} = \min\big(\varphi^{\mathfrak{I}[x\mapsto a]}\colon a \in A\big)$.

Sprech- und Schreibweisen für $\varphi^{\mathfrak{I}} = 1$: φ wahr unter $\mathfrak{I}$
$\mathfrak{I}$ erfült φ
$\mathfrak{I}$ Modell von φ
$\mathfrak{I} \models \varphi$

Syntax: Quantorenrang

$$\begin{array}{rcl} \text{qr}\colon \text{FO}(S) & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ \varphi & \longmapsto & \text{qr}(\varphi) \in \mathbb{N} \end{array}$$

induktiv: qr$(\varphi) = 0$ für atomares φ.
qr$(\neg\varphi) :=$ qr(φ).
qr$(\varphi \wedge \psi) =$ qr$(\varphi \vee \psi) :=$ max(qr(φ), qr(ψ)).
qr$(\exists x\varphi) =$ qr$(\forall x\varphi) :=$ qr$(\varphi) + 1$.

Formeln von Quantorenrang 0 heißen *quantorenfrei*.

Bsp: qr$(0 < fx) = 0$
qr$(\forall x \exists y\, x < y) = 2$
qr$(0 < fx \wedge \forall x \exists y\, x < y) = 2$

Belegungen und freie Variablen

Werte der Belegung $\beta(x) \in A$ über $\mathcal{A}$ nur relevant für $x \in$ frei(φ).

Für $\varphi(x_1, \dots, x_n) \in$ FO$_n(S)$ (frei$(\varphi) \subseteq \mathcal{V}_n = \{x_1, \dots, x_n\}$),
$\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) = (\beta(x_1), \dots, \beta(x_n)) \in A^n$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \dots, a_n] \quad \text{:gdw.} \quad \left[\begin{array}{l} (\mathcal{A}, \beta) \models \varphi \text{ für ein/alle } \beta \text{ mit} \\ \beta(x_i) = a_i \text{ für } i = 1, \dots n \end{array}\right].$$

Bsp.: $\varphi(x) = \forall y Rxy$ beschreibt eine Eigenschaft von x,
$\varphi^{\mathfrak{I}}$ hängt nicht von $\beta(y)$ ab, aber von $\beta(x)$

speziell für Sätze (frei$(\varphi) = \emptyset$): $\varphi^{\mathfrak{I}}$ hängt nur von $\mathcal{A}$ ab,
$\mathcal{A} \models \varphi$ oder $\mathcal{A} \not\models \varphi$
unabhängig von β

Semantische Grundbegriffe

übertragen sich direkt von AL auf FO!

Folgerungsbeziehung, $\varphi \models \psi$: f.a. $\mathfrak{I}$ gilt $\big(\mathfrak{I} \models \varphi \ \Rightarrow \ \mathfrak{I} \models \psi\big)$.

logische Äquivalenz, $\varphi \equiv \psi$: f.a. $\mathfrak{I}$ gilt $\big(\mathfrak{I} \models \varphi \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{I} \models \psi\big)$.
vgl. *Erfüllbarkeitsäquivalenz* (später)

Erfüllbarkeit, $\varphi \in$ SAT(FO): es gibt $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Allgemeingültigkeit: für alle $\mathfrak{I}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Äquivalent?
- $\forall x \forall y \varphi(x,y) \ \equiv \ \forall y \forall x \varphi(x,y)$?
- $\forall x \varphi \ \equiv \ \neg\exists x \neg\varphi$?

Erfüllbar?
- $\forall x \exists y Rxy \ \wedge \ \neg\exists y \forall x Rxy$?
- $\forall x \forall y (Rxy \ \wedge \ \neg Ryx)$?
- $\forall x \forall y (Rxy \leftrightarrow \neg Ryx)$?

Variationen: Spielsemantik (model checking $\varphi \in$ NNF)

Spiel zwischen Verifizierer und Falsifizierer zu $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ über $\mathcal{A}$

Spielpositionen: $(\psi, \mathbf{a}) \in \mathrm{SF}(\varphi) \times A^n$

Züge in Position $(\psi, \mathbf{a})$, $\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n)$:

$\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$	**F** am Zug zieht nach $(\psi_1, \mathbf{a})$ oder nach $(\psi_2, \mathbf{a})$.
$\psi = \psi_1 \vee \psi_2$	**V** am Zug zieht nach $(\psi_1, \mathbf{a})$ oder nach $(\psi_2, \mathbf{a})$.
$\psi = \forall x_i \psi_0$	**F** am Zug zieht nach einem $(\psi_0, \mathbf{a}[x_i \mapsto a_i'])$.
$\psi = \exists x_i \psi_0$	**V** am Zug zieht nach einem $(\psi_0, \mathbf{a}[x_i \mapsto a_i'])$.

Spiel-Ende in Positionen $(\psi, \mathbf{a})$, ψ atomar oder negiert atomar.

Gewinner: **V** gewinnt in Endposition $(\psi, \mathbf{a})$, wenn $\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}]$.
F gewinnt in Endposition $(\psi, \mathbf{a})$, wenn $\mathcal{A} \not\models \psi[\mathbf{a}]$.

Satz: $\mathcal{A} \models \psi[\mathbf{a}] \ \Leftrightarrow$ **V** hat Gewinnstrategie in Position $(\psi, \mathbf{a})$.

Variationen: relationale Semantik (Prädikatenlogik!)

mit $\varphi(x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{FO}_n(S)$ und S-Struktur $\mathcal{A}$
assoziiere die n-stellige Relation

$$[\![\varphi]\!]^{\mathcal{A}} := \big\{\mathbf{a} = (a_1,\dots,a_n) \in A^n \colon \mathcal{A} \models \varphi[\mathbf{a}]\big\} \subseteq A^n$$

$\longrightarrow$ relationale Algebra

Korrespondenzen:

Konjunktion $\wedge$	—	Durchschnitt $\cap$
Disjunktion $\vee$	—	Vereinigung $\cup$
Negation $\neg$	—	Komplement
existenzielle Quant. $\exists$	—	Projektion

$\longrightarrow$ relationale Datenbanken, SQL

FO mit oder ohne = ?

FO und $\mathrm{FO}^{\neq}$

- Gleichheit ist Bestandteil der *Logik* in FO;
  anders als interpretierte Relationen $R \in S$.
- natürliche Formalisierungen brauchen oft $=$,
  z.B.: Injektivität, algebraische Identitäten, ...
- dennoch möglich: Reduktion von FO auf $\mathrm{FO}^{\neq}$;
  Idee: modelliere $=$ durch interpretierte Relation $\sim$.

  $\widehat{S} := S \cup \{\sim\}$

  Verträglichkeitsbedingungen:
  $\sim$ Kongruenzrelation bzgl. aller $R, f \in S$

  erhalte Modelle $\mathcal{A}_0$ mit echter Gleichheit als $\sim$-Quotientien:

  $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}\big/{\sim^{\mathcal{A}}} = \big(A/{\sim^{\mathcal{A}}}, \dots, [c^{\mathcal{A}}]_{\sim^{\mathcal{A}}}, \dots, f^{\mathcal{A}}/{\sim^{\mathcal{A}}}, \dots, R^{\mathcal{A}}/{\sim^{\mathcal{A}}}\big)$
  $\sim$-Äquivalenzklassen als Elemente