Sequenzenkalkül

allgemeiner Beweiskalkül

Sequenzen

$\Gamma \vdash \Delta$ $\quad \Gamma, \Delta \subseteq$ AL, endlich
auch: $\Gamma; \Delta$ oder Γ, Δ)
Γ, Δ als ungeordnete Listen . . .

$\Gamma \vdash \Delta$ *allgemeingültig* gdw. $\bigwedge \Gamma \models \bigvee \Delta$

wichtig: links Konjunktion (der Voraussetzungen)
rechts Disjunktion (möglicher Konsequenzen)

Bsp.: $\varphi \vdash \psi$ allgemeingültig gdw. $\varphi \models \psi$.
$\emptyset \vdash \psi$ allgemeingültig gdw. ψ allgemeingültig.
$\varphi \vdash \emptyset$ allgemeingültig gdw. φ unerfüllbar.

Sequenzenkalkül

Regeln zur Erzeugung aller allgemeingültigen Sequenzen.

AL Sequenzenkalkül $\mathcal{SK}$

(Ax) $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$

(0-Ax) $\dfrac{}{\Gamma, 0 \vdash \Delta}$ $\qquad$ (1-Ax) $\dfrac{}{\Gamma \vdash \Delta, 1}$

($\neg$L) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$ $\qquad$ ($\neg$R) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta, \neg\varphi}$

($\vee$L) $\dfrac{\Gamma, \varphi \vdash \Delta \qquad \Gamma, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \vee \psi \vdash \Delta}$ $\qquad$ ($\vee$R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \vee \psi}$

($\wedge$L) $\dfrac{\Gamma, \varphi, \psi \vdash \Delta}{\Gamma, \varphi \wedge \psi \vdash \Delta}$ $\qquad$ ($\wedge$R) $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \qquad \Gamma \vdash \Delta, \psi}{\Gamma \vdash \Delta, \varphi \wedge \psi}$

Korrektheit nachprüfen! $\qquad$ sogar rückwärts (kein Verlust)!

Sequenzenkalkül

Erzeugung allgemeingültiger Sequenzen durch Sequenzenregeln

Sequenzenregeln

neue Sequenzen aus bereits abgeleiteten Sequenzen

Format: $\dfrac{\text{Prämissen}}{\text{Konklusion}}$

Beispiele: $\dfrac{}{\Gamma, \varphi \vdash \Delta, \varphi}$ $\quad$ oder $\quad$ $\dfrac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi}{\Gamma, \neg\varphi \vdash \Delta}$

Korrektheit

des Kalküls: jede ableitbare Sequenz ist allgemeingültig.

einer Regel: sind die Prämissen allgemeingültig,
so auch die Konklusion.

Beispiel

Ableitung der allgemeingültigen Sequenz $p \vdash (p \wedge q) \vee \neg q$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p, \neg q}\,(\text{Ax}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{p, q \vdash q}\,(\text{Ax})}{p \vdash q, \neg q}\,(\neg\text{R})}{p \vdash (p \wedge q), \neg q}\,(\wedge\text{R})}{p \vdash (p \wedge q) \vee \neg q}\,(\vee\text{R})$$

Vollständigkeit

Jede allgemeingültige Sequenz ist ableitbar.

Beweisidee: systematische Beweissuche rückwärts

> zu jeder Formel in einer Konklusions-Sequenz
> existiert (genau) eine Regel mit Prämissen,
> in der diese Formel abgebaut ist.

in rückwärts von der Zielsequenz generiertem Beweisbaum gilt:
Zielsequenz allgemeingültig $\Leftrightarrow$ alle Sequenzen an den Blättern sind allgemeingültig

eine Sequenz aus Variablen $\Leftrightarrow$ Instanz von (Ax), Axiom
ist allgemeingültig

Beispiel Beweissuche

für eine *nicht* allgemeingültige Sequenz

$$\dfrac{\dfrac{(\mathsf{Ax})\dfrac{}{p \vdash p} \qquad \mathbf{p \vdash q}}{(\wedge\mathsf{R})\dfrac{}{p \vdash p \wedge q}} \qquad (\wedge\mathsf{R})\dfrac{\mathbf{q \vdash p} \qquad (\mathsf{Ax})\dfrac{}{q \vdash q}}{q \vdash p \wedge q}}{(\vee\mathsf{L})\dfrac{}{p \vee q \vdash p \wedge q}}$$

Man liest ab, dass z.B. die Interpretation $p \mapsto 1$; $q \mapsto 0$ ein Gegenbeispiel liefert.

Satz

Der AL Sequenzenkalkül ist korrekt und vollständig
für die Ableitung aller allgemeingültigen AL Sequenzen.

Schnittregeln, von $\mathcal{SK}$ zu $\mathcal{SK}^+$

Hinzunahme weiterer korrekter Regeln
Schnittregel erlaubt direkte Nachbildung von **Kettenschlüssen** **indirektem Beweis**

- Kettenschluss: aus $(A \Rightarrow B)$ und $(B \Rightarrow C)$ gewinne $(A \Rightarrow C)$ klassische Schlussfigur des "modus ponens"
- indirekter Beweis: aus $(\neg A \Rightarrow \bot)$ gewinne A

$$\text{(modus ponens)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$$

korrekt (nachprüfen!)

Anwendung von modus ponens 'schluckt' Hilfsformel φ
problematisch für (rückwärts-) Beweissuche

Schnittregeln, von $\mathcal{SK}$ zu $\mathcal{SK}^+$

$$\text{(modus ponens)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma', \varphi \vdash \Delta}{\Gamma, \Gamma' \vdash \Delta}$$

Widerspruchsregel:

$$\text{(Kontradiktion)} \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \qquad \Gamma' \vdash \neg\varphi}{\Gamma, \Gamma' \vdash \emptyset}$$

jede konkrete Instanz von modus ponens oder Kontradiktion ist in $\mathcal{SK}$ eliminierbar (warum?)

Kontradiktion lässt sich direkt in $\mathcal{SK}$ + modus ponens herleiten

ebenso z.B. für die Schlussfigur des indirekten Beweises:

$$\text{(Widerspruch)} \qquad \frac{\Gamma, \neg\varphi \vdash \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi \vdash \neg\psi}{\Gamma \vdash \varphi}$$